# Planche 135/

## Exercice 1

Étudier $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

**Correction :** La fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Comme pour $x > 0$, $[x\,;x^2] \subset \mathbb{R}^*$, pour $a \in \mathbb{R}^*$ quelconque, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $\mathrm{F} : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction $x \longmapsto x^2$ étant, elle aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, d'après les théorèmes sur les composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $f$ définie par $f(x) = \mathrm{F}(x^2) - \mathrm{F}(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2x\mathrm{F}'(x^2) - \mathrm{F}'(x) &= 2x\varphi(x^2) - \varphi(x) = 2x\frac{\mathrm{e}^{-x^4}}{x^2} - \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x} \\ &= \frac{2\,\mathrm{e}^{-x^4} - \mathrm{e}^{-x^2}}{x}.\end{aligned}$$

Reste à trouver le signe de la dérivée pour avoir les variations de $f$.

Commentaires : *Honnêtement, vu ce qui suit, je pense que l'exercice s'arrête là. Après ce n'est plus trop de votre niveau. Essayez juste de comprendre sans vous stresser.*

On résout alors l'équation,

$$\begin{aligned}2e^{-x^4} &\geqslant e^{-x^2} \\ -x^4 + \ln(2) &\geqslant -x^2 \\ -x^4 + x^2 + \ln(2) &\geqslant 0\end{aligned}$$

En posant $\mathrm{X} = x^2$, on factorise $-\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + \ln(2) = -\left(\mathrm{X} - \underbrace{\frac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}}_{=x_0^2}\right)\left(\mathrm{X} \underbrace{- \frac{1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}}_{>0}\right)$

$$-\,(x - x_0)\,(x + x_0)\left(x^2 + \frac{\sqrt{1+4\ln(2)}-1}{2}\right) \geqslant 0$$

Du signe de $-\,(x - x_0)\,(x + x_0)$ avec $x_0 = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}} \simeq 1,2.$

Il ne reste plus qu'à faire un tableau de signes pour avoir celui de la dérivée.

| $x$ | $-\infty$ | | $-x_0$ | | -1 | | $0$ | | $1$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{2e^{-x^2}}{x}$ | | $-$ | | | | $-$ | $\|$ | $+$ | | | | $+$ | |
| $2e^{-x^4}-e^{-x^2}$ | | $-$ | $0$ | | | $+$ | $1$ | $+$ | | | $0$ | $-$ | |
| $\mathrm{F}'(x)$ | | $+$ | $0$ | | | $-$ | $\|$ | $+$ | | | $0$ | $-$ | |
| $\mathrm{F}$ | $0$ | | $\mathrm{F}(-x_0)>0$ | | $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t=0$ | | $-\infty \,\|\, -\infty$ | | $\displaystyle\int_{1}^{1}\frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t=0$ | | $\mathrm{F}(x_0)>0$ | | $0$ |

Comme $t \longmapsto \dfrac{e^{-t^2}}{t}$ est impaire, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = 0$.

Pour les limites en $0$, on peut majorer $\dfrac{e^{-t^2}}{t}$ par $\dfrac{1}{t}$ pour avoir

$$\mathrm{F}(x) \leqslant \int_{x}^{x^2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|x| \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{F}(x) = -\infty$ et la courbe de $\mathrm{F}$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

Pour la limite en $+\infty$, on commence par poser $t = xu$ pour se débarrasser de $x$ dans une des deux bornes :

$$0 \leqslant \mathrm{F}(x) = \int_{x}^{x^2}\frac{e^{-t^2}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{x}\frac{e^{-(xu)^2}}{xu}x\,\mathrm{d}u = \int_{1}^{x}\frac{e^{-(xu)^2}}{u}\,\mathrm{d}u$$

Ensuite, on majore $\dfrac{1}{u}$ par $1$ et $e^{-(xu)^2}$ par $e^{-x^2u}$,

$$\begin{aligned} &\leqslant \int_{1}^{x} e^{-x^2u}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{x^2}e^{-x^2u}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{x^2}e^{-x^2} - \frac{1}{x^2}e^{-x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x) = 0$ et la courbe de $\mathrm{F}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.

Enfin, pour la limite en $-\infty$, on fait pareil et on trouve pareil : $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{F}(x) = 0$ et la courbe de $\mathrm{F}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote en $-\infty$.

## Exercice 2

1. Racines quatrièmes de $-1$. Qu'est-ce que cela représente géométriquement ?
2. En déduire une factorisation du polynôme $X^4+1 \in \mathbb{R}[X]$.

**Correction :**

1. D'abord trouver une racine « primitive » de $-1 = e^{i\pi}$ : $\omega_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ convient.

   Pour trouver toutes les racines de $-1$, on multiplie $\omega_0$ par les racines quatrièmes de l'unité $e^{i\frac{2k\pi}{4}}$, $k \in [\![0\,;3]\!]$ *i.e.* $e^{i0}=1$, $e^{i\frac{2\pi}{4}} = i$, $e^{i\frac{4k\pi}{4}} = -1$ et $e^{i\frac{6\pi}{4}} = -i$.

   Les racines quatrièmes de $-1$ sont donc

   - $\omega_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$,
   - $-\omega_0 = e^{i\frac{\pi}{4}+\pi} = e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$,
   - $i\omega_0 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$,
   - $-i\omega_0 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

   Ce sont les sommets d'un carré inscrit dans le cercle unité passant par les points d'affixes $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$.

2. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
X^4+1 &= (X-\omega_0)(X-i\omega_0)(X+\omega_0)(X+i\omega_0)\\
&= \left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)\right)\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right).
\end{aligned}$$

Ça c'est la facorisation dans $\mathbb{C}[X]$. On regroupe maintenant les termes conjugués :

$$\begin{aligned}
&= \left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)\left(X-\overline{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)}\right)\left(X-\overline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}\right)\\
&= \underbrace{\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)\left(X-\overline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}\right)}_{X^2-2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)+\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right|^2}\underbrace{\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)\left(X-\overline{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)}\right)}_{X^2-2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)+\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right|^2}\\
&= \left(X^2-2\frac{1}{\sqrt{2}}X+1\right)\left(X^2+2\frac{1}{\sqrt{2}}X+1\right)\\
&= \left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right) \qquad \text{Factorisation dans } \mathbb{R}[X].
\end{aligned}$$

Commentaires : *Il est plus élégant de dire que le polynôme $X^4+1$ est à coefficient réels donc si $\alpha$ est racine, on aura aussi $\overline{\alpha}$ et qu'il est aussi pair donc si $\alpha$ est racine, $-\alpha$ aussi.*

*À partir d'une seule racine $\alpha$, on aura alors les quatre : $\alpha$, $-\alpha$, $\overline{\alpha}$ et $-\overline{\alpha}$ que l'on regroupera pareil. Avec $\omega_0$, on obtient pareil.*

***Remarque :*** *Retenez bien que $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2-2\mathrm{Re}(\alpha)+|\alpha|^2$.*