Planche 138/

Exercice 1

On considère $y' \sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0$.

1. Dans quels intervalles peut-on résoudre cette équation ?
2. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
3. Ensemble des solutions.
4. Y a-t-il des solutions globales (sur $\mathbb{R}$) ?

Correction : On considère une équation différentielle linéaire du première ordre.

1. On ne peut résoudre cette équation que sur des intervalles où la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$ est (définie et) continue soit des intervalles de la forme $]k\pi\,;(k+1)\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$.

   Par exemples, $]0\,;\pi[$, $]-\pi\,;0[$ ou $]\pi\,;2\pi[$.
2. Sur un tel intervalle I, on a : $y' \sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0 \iff y' - y\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} + \dfrac{1}{\sin(x)} = 0$ dont l'équation homogène associée est
$$y' - y\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0.$$
   Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sur I étant $x \longmapsto \ln|\sin(x)|$, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :
$$\mathcal{S}_{\mathrm{H}} = \{x \longmapsto \lambda_{\mathrm{I}}\,|\sin(x)|\,,\ \lambda_{\mathrm{I}} \in \mathbb{R}\}\,.$$
   Commentaires :
   - *On ne peut pas enlever les valeurs absolues sans savoir se signe de $\sin(x)$ sur I.*
   - *La constante λ_{I} dépend de l'intervalle sur lequel on intègre l'équation différentielle.*
3. Il est clair que la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est une solution particulière de l'équation.

   Les solutions générales sur tout intervalle I précédent sont donc de la forme :
$$y : x \longmapsto \cos(x) + \lambda_{\mathrm{I}}\,|\sin(x)|\,,\ \lambda_{\mathrm{I}} \in \mathbb{R}.$$
4. Cette question est hors-programme pour vous.

   Soit $p \in \mathbb{Z}$, essayons de prolonger une solution de $\mathrm{I}_{2p} =]2p\pi\,;(2p+1)\pi[$ à $]2p\pi\,;2(p+1)\pi[$:
   - Sur I_{2p}, on a : $y_1 : x \longmapsto \cos(x) + \lambda_1 \sin(x)$. $(\sin(x) \geqslant 0$ sur $\mathrm{I}_{2p})$.
   - Sur I_{2p+1}, on a : $y_2 : x \longmapsto \cos(x) - \lambda_2 \sin(x)$. $(\sin(x) \leqslant 0$ sur $\mathrm{I}_{2p+1})$.

   Si une solution globale sur $]2p\pi\,;2(p+1)\pi[$ existe alors elle est continue en $(2p+1)\pi$ *i.e.*
$$y_1((2p+1)\pi) = y_2((2p+1)\pi) \iff -1 = -1.$$
   Pas de contraintes sur les constantes.

   Elle doit aussi être dérivable en π :
$$y_1'((2p+1)\pi) = y_2'((2p+1)\pi) \iff -\lambda_1 = \lambda_2.$$
   On peut dont prolonger notre solution à $\mathbb{R}$ tout entier en posant :
$$y : x \longmapsto \cos(x) + (-1)^p\lambda\,|\sin(x)|\,, \forall\, x \in \mathrm{I}_{2p} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}.$$
   La constante sera déterminée par une condition initiale.

Exercice 2

Résoudre ces équations d'inconnue complexe z :

1. $z^2 + \bar{z} - 1 = 0$.
2. $z^2 - 2\bar{z} - 1 = 0$.

Correction : Pour ces exercices, la seule méthode qui marche est de poser $z = x + \mathrm{i}\, y$:

1. $$\begin{aligned} z^2 + \bar{z} - 1 = 0 &\iff x^2 - y^2 + x - 1 + \mathrm{i}\,(2xy - y) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + x - 1 = 0 \\ y(2x-1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -y^2 - \dfrac{1}{4} = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \text{pas de solution} \end{aligned}$$

   On trouve donc $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} + 0\,\mathrm{i}\,, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} + 0\,\mathrm{i} \right\}$. Les deux seules solutions sont réelles.

2. Même chose :

   $$\begin{aligned} z^2 - 2\bar{z} - 1 &\iff x^2 - y^2 - 2x - 1 + \mathrm{i}\,(2xy + 2y) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 - 2x - 1 = 0 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -y^2 + 2 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = \pm\sqrt{2} \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

   On trouve donc $\mathcal{S} = \left\{ 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, -1+\mathrm{i}\,\sqrt{2}, -1-\mathrm{i}\,\sqrt{2} \right\}$.