Planche 151/

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ 0 & 1+m & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelle valeur de m, le nombre 3 est il valeur propre de A ?
2. Diagonaliser A avec cette valeur de m.

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $(1+x)y' + y = 1 - \ln(1+x)$ pour $x > -1$.

Correction : Équation différentielle linéaire d'ordre 1, on résout dans l'ordre :

L'équation homogène : Comme $x > -1$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue dont une primitive sur $]-1\,;+\infty[$ est $x \longmapsto \ln(1+x)$ (sans les valeurs absolues car $x+1>0$).

Les solutions homogènes sont donc de la forme $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\ln(1+x)} = \dfrac{\lambda}{1+x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière : On pourrait utiliser la méthode de variation de la constante en cherchant une solution particulière sous la forme $x \longmapsto \dfrac{\lambda(x)}{1+x}$ avec λ une fonction dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ mais c'est bien de regarder si on peut pas en trouver une un peu mieux qui ressemble au second membre.

Il s'avère que pour $x \longmapsto \ln(1+x)$, on a :

$$(1+x)\left(\ln(1+x)\right)' + \ln(1+x) = \frac{1+x}{1+x} + \ln(1+x) = 1 + \ln(1+x)$$

Commentaires : *On n'est pas loin et je pense qu'il y avait une erreur dans l'énoncé et que c'était plutôt $+$ que $-$. À ce stade, un élève moins têtu que moi passerait à la méthode de variation de la constante mais moi j'insiste un peu*

Grâce au théorème de superposition, on sait qu'il nous suffit de trouver une solution particulière pour $(1+x)y' + y = 1$ (facile !) et $(1+x)y' + y = \ln(1+x)$ mais comme je suis un malin, je vais plutôt chercher à résoudre $(1+x)y' + y = 2$ et $(1+x)y' + y = -1 - \ln(1+x)$.

Il est clair que la fonction constante à 2 est solution de $(1+x)y' + y = 2$.

Et, d'après le calcul précédent, il apparaît que $x \longmapsto -\ln(1+x)$ est solution de $(1+x)y' + y = -1 - \ln(1+x)$.

Une solution particulière de notre équation est donc $y_p : x \longmapsto 2 - \ln(1+x)$.

Les solutions générales : Les solutions générales sont donc de la forme :

$$y : x \longmapsto \frac{\lambda}{1+x} + 2 - \ln(1+x),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Je vous fais quand même avec l'autre méthode où, en posant, $y_p : x \longmapsto \dfrac{\lambda(x)}{1+x}$, après calculs, λ serait solution de l'équation différentielle du première ordre :

$$\lambda'(x) - \cancel{(1+x)\frac{\lambda(x)}{(1+x)^2}} + \cancel{\frac{\lambda(x)}{1+x}} = 1 - \ln(1+x)$$
$$\lambda'(x) = 1 - \ln(1+x)$$

On intègre par partie, le deuxième terme avec $u : x \longmapsto x+1$ et $v : x \longmapsto \ln(1+x)$,

$$\begin{aligned}
\lambda(x) &= x - \Big[(1+x)\ln(1+x)\Big]^x + \int^x 1\,\mathrm{d}x = x - (1+x)\ln(1+x) + x \\
&= 2x - (1+x)\ln(1+x) \\
y_p(x) &= \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) \\
&= 2 - \frac{2}{1+x} - \ln(1+x). \quad \text{(petite décomposition en éléments simples)}
\end{aligned}$$

Commentaires : *Le terme en* $-\dfrac{2}{1+x}$ *sera absorbé par celui en* $\dfrac{\lambda}{1+x}$ *de la solution homogène.*

On retrouve les solutions générales sous la forme :

$$y : x \longmapsto \underbrace{\frac{\lambda}{1+x} - \frac{2}{1+x}}_{\frac{\lambda'}{1+x}} + 2 - \ln(1+x),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$