Nom :

Prénom :

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Montrer que $\forall z, z' \in \mathbb{C}, z = z' \iff |z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z') \pmod{2\pi}$.

Exercice 1 : Montrer que $\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) (1+i) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$.

Exercice 2 : Déterminer $\int^x \cos(x) \sqrt{1 + \sin(x)} dx$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Calculer la primitive suivante sur un intervalle à préciser :

$$\int^x x e^x dx.$$

Nom :

Prénom :

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Déterminer des primitives des fonctions $x \mapsto \cos^3(x)$, $x \mapsto x \arctan(x)$, $x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\omega x)$.

Exercice 1 : Calculer $(\sqrt{3} - i)^{2009}$.

Exercice 2 : Déterminer $\int^x \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Calculer la primitive suivante sur un intervalle à préciser :

$$\int^x x^2 \ln(x) dx.$$

Nom :

Prénom :

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $e^z = \omega$.

Exercice 1 : Calculer le module et l'argument de $\frac{\tan \varphi - i}{\tan \varphi + i}$ où $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Déterminer $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Calculer la primitive suivante sur un intervalle à préciser :

$$\int x \arctan(x) dx.$$

Nom :

Prénom :

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Inégalité triangulaire supérieure : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Pour les plus aguerris, cas d'égalité.

Exercice 1 : Calculer $(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$.

Exercice 2 : Calculer $\int^x \cos(x) \operatorname{ch}^3(x) dx$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Calculer la primitive suivante sur un intervalle à préciser :

$$\int^x (-x^3 + x^2 - 2x + 3)e^{-x} dx.$$

Nom :

Prénom :

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Formule d'intégration par parties avec les hypothèses de régularité et la démonstration.

Exercice 1 : Montrer que $(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right) - i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$.

Exercice 2 : Déterminer $\int^x \frac{dx}{25 + 9x^2}$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Calculer la primitive (sur un intervalle à préciser) suivante :

$$\int^x x^2 e^{\frac{x}{2}} dx.$$

Nom :

Prénom :

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Montrer que $\forall z, z' \in \mathbb{C}, z = z' \iff |z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z') \pmod{2\pi}$.

Exercice 1 : Déterminer les complexes z tels que $z, \frac{1}{z}$ et $z - 1$ aient même module.

Exercice 2 : Calculer $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx$.

Exercice 3 : Calculer la primitive (sur un intervalle à préciser) suivante :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + 1}}.$$

Nom :

Prénom :

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Intégrale de fonctions paires, impaires ou périodiques. Choix laissé à l'examineur.

Exercice 1 : Montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(k\frac{\pi}{n}\right) = \cotan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Vérifier cette valeur à l'aide de $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 2 : Soient $I = \int_0^{\pi} x \cos^2(x) dx$ et $J = \int_0^{\pi} x \sin^2(x) dx$.

1. Calculer I et I + J.
2. En déduire J.

Exercice 3 : Calculer $\int_0^1 x \arctan^2(x) dx$.

Nom :

Prénom :

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Transformation de Fresnel : $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{(0;0)\}$ et $\omega \in \mathbb{R}$, $\exists (A; \varphi) \in \mathbb{R}'_+ \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Exercice 1 : Pour quelles valeurs de l'entier n , le complexe $\left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3} \right)^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 2 : Calculer $\int^x \tan^2(x) dx$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$.

Déterminer la limite de $\int_a^b f(t) \cos(nt) dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.