Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Montrer que $\forall\, z, z' \in \mathbb{C},\ z = z' \iff |z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]$.

Exercice 1 : Montrer que $\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\int^x \cos(x)\sqrt{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Calculer la primitive suivante sur un intervalle à préciser :

$$\int^x x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Déterminer des primitives des fonctions $x \longmapsto \cos^3(x)$, $x \longmapsto x\arctan(x)$, $x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\omega x)$.

Exercice 1 : Calculer $\left(\sqrt{3}-i\right)^{2009}$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\int^x \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Calculer la primitive suivante sur un intervalle à préciser :

$$\int^x x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $\mathrm{e}^z = \omega$.

Exercice 1 : Calculer le module et l'argument de $\dfrac{\tan\varphi - \mathrm{i}}{\tan\varphi + \mathrm{i}}$ où $\varphi \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Calculer la primitive suivante sur un intervalle à préciser :

$$\int^x x\arctan(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Inégalité triangulaire supérieure : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$. Pour les plus aguerris, cas d'égalité.

Exercice 1 : Calculer $(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$.

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\int^x \cos(x)\mathrm{ch}^3(x)\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Calculer la primitive suivante sur un intervalle à préciser :

$$\int^x (-x^3 + x^2 - 2x + 3)e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Formule d'intégration par parties avec les hypothèses de régularité et la démonstration.

Exercice 1 : Montrer que $(1-i)(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right) - i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$.

Exercice 2 : Déterminer $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{25+9x^2}$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Calculer la primitive (sur un intervalle à préciser) suivante :

$$\int^x x^2 e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Montrer que $\forall\, z, z' \in \mathbb{C},\ z = z' \iff |z| = |z'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]$.

Exercice 1 : Déterminer les complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Correction : $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx = 3\ln 2 - 1$ (décomposition en éléments simples).

Exercice 3 : Calculer la primitive (sur un intervalle à préciser) suivante :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}}.$$

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Intégrale de fonctions paires, impaires ou périodiques. Choix laissé à l'examinateur.

Exercice 1 : Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(k\frac{\pi}{n}\right) = \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Vérifier cette valeur à l'aide de $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Correction :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \sin k\frac{\pi}{n} &= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{n}}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}-1}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{-2}{e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{ie^{-i\frac{\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right) = \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$

Exercice 2 : Soient $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I et I + J.
2. En déduire J.

Exercice 3 : Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\arctan^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Nombres Complexes I & Primitives

Question de cours : Transformation de Fresnel : $\forall\, a, b) \in \mathbb{R}\backslash\{(0;0)\}$ et $\omega \in \mathbb{R}$, $\exists\ (\mathrm{A}\,;\varphi) \in \mathbb{R}_+' \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi).$$

Exercice 1 : Pour quelles valeurs de l'entier n, le complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est-il un réel positif ?

Correction :

$$\left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n = \left(\frac{2^5 e^{\frac{-5i\pi}{3}}}{\sqrt{2}^3 e^{\frac{-3i\pi}{4}}}\right)^n = \left(\sqrt{2}^7 e^{\frac{-11i\pi}{12}}\right)^n = 2^{\frac{7n}{2}} e^{-\frac{11ni\pi}{12}}.$$

Donc $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n \in \mathbb{R}_+ \iff \exists k \in \mathbb{Z}, -\dfrac{11n\pi}{12} = 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 11n = 24k.$

D'après le théorème de Gauss, comme 11 et 24 sont premiers entre eux, alors $24|n$ *i.e.* $n \in 24\mathbb{Z}$. La réciproque est claire.

Exercice 2 : Calculer $\displaystyle\int^x \tan^2(x)\,\mathrm{d}x$ sur un intervalle à préciser.

Exercice 3 : Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$.

Déterminer la limite de $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction : Une intégration par parties s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= f(b)\frac{\sin(nb)}{n} - f(a)\frac{\sin(na)}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or,

— $\left|f(b)\dfrac{\sin(nb)}{n}\right| \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty}{n}$

— $\left|f(a)\dfrac{\sin(na)}{n}\right| \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty}{n}$

— $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{b-a}{n}\,\|f'\|_\infty$

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.