Fichiers Arithmetique a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Calculer $270 \wedge 105$ et $270 \vee 105$.

Correction : $270 = 2\times 3^3 \times 5$ et $105 = 3\times 5\times 7$. Donc $270\wedge 105 = 15$ et $270\vee 105 = 2\times 3^3\times 5\times 7 = 1890$.

Exercice 2 : Soient $n \geqslant 2$ et N la somme de n entiers impairs consécutifs.
Montrer que N n'est pas un nombre premier.

Correction : $\mathrm{N} = \displaystyle\sum_{k=p}^{p+n-1}(2k+1) = 2\sum_{k=p}^{p+n-1} k + \sum_{k=p}^{p+n-1} 1 = n\times(2p+n-1)+n = n(2p+n) \notin \mathbb{P}$.

Exercice 3 : Combien 15! admet-il de diviseurs ?

Correction : Écrivons la décomposition de $15! = 1\times 2\times 3\times 4\ldots 15$ en facteurs premiers.

$$15! = 2^{11}\times 3^6\times 5^3\times 7^2\times 11\times 13.$$

Un diviseur de 15! s'écrit $d = 2^\alpha\times 3^\beta\times 5^\gamma\times 7^\delta\times 11^\epsilon\times 13^\eta$ avec $0\leqslant\alpha\leqslant 11$, $0\leqslant\beta\leqslant 6$, $0\leqslant\gamma\leqslant 3$, $0\leqslant\delta\leqslant 2$, $0\leqslant\epsilon\leqslant 1$, $0\leqslant\eta\leqslant 1$.

De plus tout nombre d de cette forme est un diviseur de 15!.

Le nombre de diviseurs est donc $(11+1)(6+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 4032$.

Exercice 4 : Sachant que l'on a $96842 = 256\times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.

Correction : La seule chose à voir est que pour une division euclidienne le reste doit être plus petit que le quotient.

Donc les divisions euclidiennes s'écrivent :

$$96842 = 256\times 378 + 74 \quad \text{et} \quad 96842 = 258\times 375 + 92.$$

Exercice 5 : Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$:

1. $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24,
2. $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Correction : Il suffit de constater que pour 4 nombres consécutifs il y a nécessairement : un multiple de 2, un multiple de 3, un multiple de 4 (distinct du multiple de 2).

Donc le produit de 4 nombres consécutifs est divisible par $2\times 3\times 4 = 24$.

Exercice 6 : Calculer le pgcd des nombres 390, 720, 450.

Correction : Il s'agit ici d'utiliser la décomposition des nombres en facteurs premiers :

$$390 = 2.3.5.13,\ 720 = 2^4.3^2.5,\ 450 = 2.3^2.5^2.$$

Donc le pgcd de ces trois nombres est $2.3.5 = 30$.

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Soient a et b des entiers naturels non nuls et premiers entre eux.
Calculer le pgcd et le ppcm de $a+b$ et ab.

Correction : Soit d un diviseur commun à $a+b$ et de ab.
On a $d|a(a+b)$ et comme $d|ab$, $d|a^2$.
De même,$d|b^2$. Donc $d|(a^2 \wedge b^2)$.
Or $a \wedge b = 1$ donc $a^2 \wedge b^2 = 1$ et par suite, $d = 1$. Donc,

$$(a+b) \wedge (ab) = 1 \quad \text{et} \quad (a+b) \vee (ab) = ab(a+b).$$

Exercice 2 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ avec a_n et b_n dans $\mathbb{N}^*$.
Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Correction : $a_1 = 1$ et $b_1 = 1$.
Par récurrence, on obtient $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.
En supposant $a_n \wedge b_n = 1$, on obtient :
$a_{n+1} \wedge b_{n+1} = (a_n + 2b_n) \wedge (a_n + b_n) = b_n \wedge (a_n + b_n) = a_n \wedge b_n = 1$.
Comme $a_1 \wedge b_1 = 1$, la propriété s'établit par récurrence.

Exercice 3 : Trouver l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de 1000!.

Correction : Entre 1 et n, il y a :

- $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ nombres pairs ;
- $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ multiples de 4 ;
- $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ multiples de 8 ; ...

Le nombre cherché est donc $500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994$.

Exercice 4 : Soit m un entier tel que $2^m + 1$ soit premier.
Montrer que m est de la forme $m = 2^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

Correction : Supposons que m ne soit pas de la forme cherchée.
Alors, il existe deux entiers p et q avec q impair distinct de 1 tel que $m = pq$.
Alors

$$2^m + 1 = (2^p)^q + 1 = (2^p + 1)(2^{p(q-1)} - 2^{p(q-2)} + \cdots + 1)$$

et $2^p + 1 | 2^m + 1$ donc $p = m$ ce qui est impossible.

Un peu d'histoire : Les nombres de la forme $\mathrm{F}_n = 2^{2^n} + 1$ sont appelés nombres de Fermat. Fermat avait conjecturé qu'ils étaient tous premiers. Ils le sont pour $n \leqslant 4$.

Mais F_5 n'est pas premier ($641|\mathrm{F}_5$, Euler 1732) et aucun jusqu'à F_{32} n'est premier.

F_{33} est le plus petit nombre de Fermat dont on ne sache s'il est composé ou non. On n'a trouvé aucun autre nombre de Fermat premier que $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3, \mathrm{F}_4$.

Exercice 5 : Calculer pgcd $((;1)\,8480, 9828)$.

En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Correction :

1. pgcd $((;1)\,8480, 9828) = 84$;
2. $25 \times 18480 + (-47) \times 9828 = 84$.

Exercice 6 : Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360.

Correction : Soient a, b deux entiers de pgcd 18 et de somme 360.

Soit a', b' tel que $a = 18a'$ et $b = 18b'$. Alors a' et b' sont premiers entre eux, et leur somme est $360/18 = 20$.

Nous pouvons facilement énumérer tous les couples d'entiers naturels (a', b') $(a' \leqslant b')$ qui vérifient cette condition, ce sont les couples :

$$(1, 19), (3, 17), (7, 13), (9, 11).$$

Pour obtenir les couples (a, b) recherchés $(a \leqslant b)$, il suffit de multiplier les couples précédents par 18 :

$$(18, 342), (54, 306), (126, 234), (162, 198).$$

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Montrer que si r est le reste de la division euclidienne de $a \in \mathbb{N}$ par $b \in \mathbb{N}^\star$ alors $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.

Correction : On $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.

$2^a - 1 = 2^{bq+r} - 1 = 2^{bq+r} - 2^r + 2^r - 1 = (2^b - 1)(1 + 2^b + \cdots + 2^{b(q-1)})2^r + 2^r - 1$

avec $0 \leqslant 2r - 1 < 2b - 1$.

Exercice 2 : Trouver tous les couples (x, y) d'entiers naturels non nuls tels que $\begin{cases} x + y = 56 \\ x \vee y = 105 \end{cases}$.

Correction : Sans perte de généralité, supposons que $x \leqslant y$.

Notons $d = (x \wedge y)$. On peut poser $x = d\mathrm{X}$ et $y = d\mathrm{Y}$ avec $\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y} = 1$.

On a $(x \wedge y)(x \vee y) = xy$ donc $105d = d^2\mathrm{XY}$ et $d\mathrm{XY} = 3 \times 5 \times 7$. On a $\boxed{d | 3 \times 5 \times 7}$.

D'autre part $x + y = 56$ donc $d(\mathrm{X} + \mathrm{Y}) = 2^3 \times 7$. On a $\boxed{d | 2^3 \times 7}$.

Ainsi, d divise le pgcd de $3 \times 5 \times 7$ et $2^3 \times 7$ qui est 7.

- Si $d = 1$, alors $\begin{cases} \mathrm{XY} = 105 \\ \mathrm{X} + \mathrm{Y} = 56 \end{cases}$. X et Y sont solution de $\mathrm{Z}^2 - 56\mathrm{Z} + 105 = 0$. Or $\Delta' = 28^2 - 105 = 697$ n'est pas un carré d'entier, donc ces solutions ne sont pas rationnelles.
- Si $d = 7$, alors $\begin{cases} \mathrm{XY} = 15 \\ \mathrm{X} + \mathrm{Y} = 8 \end{cases}$. X et Y sont solution de $\mathrm{Z}^2 - 8\mathrm{Z} + 15 = 0$.

  $\Delta' = 4^2 - 15 = 1$. Les solutions Y, Y sont 3 et 5 donc x, y valent 21 et 35.

Donc,

$$\mathcal{S} = \{(21, 35), (35, 21)\}.$$

Exercice 3 : Étant donné $n \in \mathbb{N}$, montrer que $2^n + 3^n$ et $2^{n+1} + 3^{n+1}$ sont premiers entre eux.

Correction : $2^{n+1} + 3^{n+1} = 3(2^n + 3^n) - 2^n$ donc $[2^{n+1} + 3^{n+1}] \wedge [2^n + 3^n] = [2^n + 3^n] \wedge 2^n$.
Puis $[2^n + 3^n] \wedge 2^n = 2^n \wedge 3^n$.
Or, $2 \wedge 3 = 1$ entraîne $2^n \wedge 3^n = 1$.

Exercice 4 : Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $n! + 1$ et $(n+1)! + 1$ sont premiers entre eux.

Correction : $(n+1)! + 1 = (n+1)[n! + 1] - n$.
Donc, $[(n+1)! + 1] \wedge [n! + 1] = [n! + 1] \wedge n$.
Or, $[n! + 1] = (n-1)!n + 1$ donc $[n! + 1] \wedge n = n \wedge 1 = 1$.

Exercice 5 : Trouver n de la forme $3^p 5^q$ sachant que le produit de ses diviseurs est 45^{42}.

Correction : Les diviseurs de $3^p 5^q$ sont les $3^i 5^j$ pour $i \in [\![0, p]\!]$ et $j \in [\![0, q]\!]$.
Le produit des diviseurs de $3^p 5^q$ est

$$\prod_{i=0}^{p} \prod_{j=0}^{q} 3^i 5^j = \prod_{i=0}^{p} \left[(3^i)^{q+1} \prod_{j=0}^{q} 5^j \right] = \left[\prod_{j=0}^{q} 5^j \right]^{p+1} \prod_{i=0}^{p} [(3^i)^{q+1}] = \left[5^{\frac{q(q+1)}{2}} \right]^{p+1} \left[3^{\frac{p(p+1)}{2}} \right]^{q+1}.$$

On résout $\begin{cases} \dfrac{p(p+1)(q+1)}{2} = 84 \\ \dfrac{q(q+1)(p+1)}{2} = 42 \end{cases}$ d'où $p = 2q$. On a $q(q+1)(2q+1) = 3.4.7$ donc $\boxed{q = 3 \text{ et } p = 6}$.

Exercice 6 : Montrer que si r est le reste de la division euclidienne de $a \in \mathbb{N}$ par $b \in \mathbb{N}^\star$ alors $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.

Correction : On $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.
$2^a - 1 = 2^{bq+r} - 1 = 2^{bq+r} - 2^r + 2^r - 1 = (2^b - 1)(1 + 2^b + \cdots + 2^{b(q-1)})2^r + 2^r - 1$
avec $0 \leqslant 2r - 1 < 2b - 1$.