Fichiers `Ensembles` a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer de deux manières que :

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \implies \mathrm{A} = \mathrm{B}.$$

Exercice 2 : Montrer que $\begin{cases} \mathrm{B} \setminus \mathrm{C} \subset \mathrm{A} \\ \mathrm{C} \setminus \mathrm{D} \subset \mathrm{A} \end{cases} \implies \mathrm{B} \setminus \mathrm{D} \subset \mathrm{A}.$

Exercice 3 : Montrer que $\begin{cases} \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C} \\ \mathrm{B} \setminus \mathrm{A} = \mathrm{C} \setminus \mathrm{A} \end{cases} \implies \mathrm{B} = \mathrm{C}.$

Exercice 4 : Montrer que $\begin{cases} \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C} \\ \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C} \end{cases} \implies \mathrm{B} = \mathrm{C}.$

Exercice 5 : Écrire $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{E})\ )$ lorsque $\mathrm{E} = \{a, b\}$.

Exercice 6 : Soient E un ensemble, $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$. Montrer :

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{C} \iff \mathrm{A} \cup \bar{\mathrm{B}} = \mathrm{A} \cup \bar{\mathrm{C}}.$$

Exercice 7 : Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$.

Montrer que $\mathrm{B} = f\left(f^{-1}(\mathrm{B})\right)$ si, et seulement si, $\mathrm{B} \subset f(\mathrm{E})$.

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Comparer :

- $\mathcal{P}(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \cap \mathcal{P}(\mathrm{F})$;
- $\mathcal{P}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \cup \mathcal{P}(\mathrm{F})$;
- $\mathcal{P}(\mathrm{E} \times \mathrm{F})$ et $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \times \mathcal{P}(\mathrm{F})$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application entre deux ensembles E et F.

1. Montrer que si $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, $f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{B})$.
2. Est-ce vrai pour l'intersection ?

Exercice 3 : Soient f une application de E vers F et $(\mathrm{B}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble J.

Montrer que $f^{-1}(\bigcap_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{B}_i) = \bigcap_{i\in \mathrm{J}} f^{-1}(\mathrm{B}_i)$.

Exercice 4 : Soient $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application, $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$.

Montrer que $f(\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{B})) = f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}$.

Exercice 5 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application, $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$.

1. Simplifier $f\left(f^{-1}(f(\mathrm{A}))\right)$ et $f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(\mathrm{B})\right)\right)$.
2. Montrer que $f\left(\mathrm{A} \cap f^{-1}(\mathrm{B})\right) = f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}$.

Exercice 6 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$ une application, $\mathrm{A}, \mathrm{A}' \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B}, \mathrm{B}' \subset \mathrm{F}$.

1. Comparer $f(\mathrm{A}\Delta \mathrm{A}')$ et $f(\mathrm{A})\Delta f(\mathrm{A}')$.
2. Comparer $f^{-1}(\mathrm{B}\Delta \mathrm{B}')$ et $f^{-1}(\mathrm{B})\Delta f^{-1}(\mathrm{B}')$.

Exercice 7 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{E}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$, et $f^0 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$. Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}, \mathrm{A}_n = f^n(\mathrm{A})$, et $\mathrm{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$.

1. Montrer que $f(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$.
2. Montrer que B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A.

Exercice 8 : Soit E un ensemble et soient A, B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et B par :

$$\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = (\mathrm{A} \cap \bar{\mathrm{B}}) \cup (\bar{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$$

où $\bar{\mathrm{A}}$ désigne le complémentaire de A dans E. Démontrer que $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \mathrm{B}$ si et seulement si $\mathrm{A} = \varnothing$.

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Étant donné $(\mathrm{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille d'ensembles, et B un ensemble, tous inclus dans un ensemble E.

1. Montrer que $B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$.
2. Déterminer $I = \bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n \right]$.

Exercice 2 : À quelle condition sur f a-t-on : $\forall \ A \subset E, \ f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$?

Exercice 3 : Soit $f : E \longmapsto E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et $f^0 = \mathrm{id}_E$.

Soit $A \subset E$, $A_n = f^n(A)$, et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

1. Montrer que $f(B) \subset B$.
2. Montrer que B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A.

Exercice 4 : On considère une suite d'ensembles $(A_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$I_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \text{ et } U_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$I_{n+1} \subset I_n$ et $U_n \subset U_{n+1}$.

Exercice 5 : Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathfrak{P}(E)$. Montrer :

$$A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C},$$

où on a noté $\overline{B}$ (resp. $\overline{C}$) le complémentaire de B (resp. C) dans E.

Exercice 6 : Soit E un ensemble, A, B et C des parties de E. On suppose que

$$A \cup B = A \cap C$$
$$B \cup C = B \cap A$$
$$C \cup A = C \cap B$$

Montrer que $A = B = C$.

Exercice 7 : Soit f une application de E dans F.

Soit g l'application de $\mathscr{P}(F) \implies \mathscr{P}(E)$ définie par $\forall\, Y \subset F, g(Y) = f^{-1}(Y)$.

1. Montrer que g est surjective si et seulement si f est injective.
2. Montrer que g est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 8 : Soit E et F deux ensembles, soit A, C deux parties de E et B, D deux parties de F. Démontrer que

$$(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \cap (\mathrm{C} \times \mathrm{D}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \times (\mathrm{B} \cap \mathrm{D}).$$