

Fichiers Ensembles-Nombres a, b et c

Exercices faciles : _____

Exercice 1 : Montrer que :

1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

2. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$

3. $\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice de difficulté moyenne : _____

Exercice 1 : Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.**Exercice 2 :** 1. Soit $N_n = 0,19971997 \dots 1997$ (n fois). Mettre N_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}_{n_0}^*$.2. Soit $M = 0,199719971997 \dots$. Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M .

3. Même question avec :

$$P = 0,11111 \dots + 0,22222 \dots + 0,33333 \dots + 0,44444 \dots + 0,55555 \dots + 0,66666 \dots + 0,77777 \dots + 0,88888 \dots + 0,99999 \dots$$

Exercices plus ardues : _____

Exercice 1 : On ne cherchera pas ici à savoir si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou pas. Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.En déduire qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.**Exercice 2 :** Montrer que $x = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ est un entier.Aide : On pourra considérer le polynôme $P(X) = X(X^2 - 21) - 90$.**Exercice 3 :** 1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,

3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Exercice 4 : Soit $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$. On suppose que tous les a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ (avec α et β premiers entre eux) alors α divise a_0 et β divise a_n .
2. On considère le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel.