Fichiers `Fonctions-Circulaires` a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Étudier le signe de $\cos(3x)+\cos(5x)$.

Exercice 2 : Étudier le signe de $\cos(x)-\cos(3x)$.

Exercice 3 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $x \longmapsto x^2\cos(x)\sin(x)$.

Exercice 4 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $\dfrac{\cos(x)}{1+\sqrt{x}}$.

Exercice 5 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$.

Exercice 6 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}}$.

Exercice 7 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $x \longmapsto \cos^4(x) - \sin^4(x)$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $x \longmapsto \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

Exercice 2 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $x \longmapsto \cos(\ln(1+\sqrt{x}))$.

Exercice 3 : Déterminer le domaine de dérivabilité puis la fonction dérivée de $x \longmapsto \sin\left(\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right)$.

Exercice 4 : Étude complète de $f_2 : x \longmapsto |\tan x| + \cos(x)$.

Correction : f_2 est définie sur $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$, paire et 2π-périodique. f_2 est continue sur D en vertu de théorèmes généraux. On étudie f_2 sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[\cup]\dfrac{\pi}{2},\pi]$.

Étude en $\dfrac{\pi}{2}$.

$f(x) \underset{x\to\pi/2}{\sim} |\tan x|$ et donc, $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = +\infty$. C_2 admet la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ pour droite asymptote.

Dérivabilité et dérivée.

f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \notin \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $f_2'(x) = \varepsilon\dfrac{1}{\cos^2 x} - \sin(x)$ où ε est le signe de $\tan x$.

f_2 est aussi dérivable à droite en 0 et $(f_2)'_d(0) = 1$. Par symétrie, f_2 est dérivable à gauche en 0 et $(f_2)'_g(0) = -1$. f_2 n'est pas dérivable en 0.

De même, f_2 est dérivable à gauche et à droite en π avec $(f_2)'_g(\pi) = -1$ et $(f_2)'_d(\pi) = 1$, et n'est donc pas dérivable en π.

Variations.

f_2 est strictement décroissante sur $]\dfrac{\pi}{2},\pi]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $]\dfrac{\pi}{2},\pi]$. Puis, pour x élément de $]0,\dfrac{\pi}{2}[$, $f_2'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \sin(x) > 1 - 1 = 0$. f_2' est strictement positive sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$ et donc f_2 est strictement croissante sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$.

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Construire le graphe de la fonction définie par $f_4(x) = |\tan x| + \cos x$.

Correction : f_4 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, 2π-périodique et paire.

On étudie donc f_4 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Étude des variations de f_4.

Pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f_4(x) = \tan x + \cos x$ et donc,

$$f_4'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \geqslant 1 - 1 = 0,$$

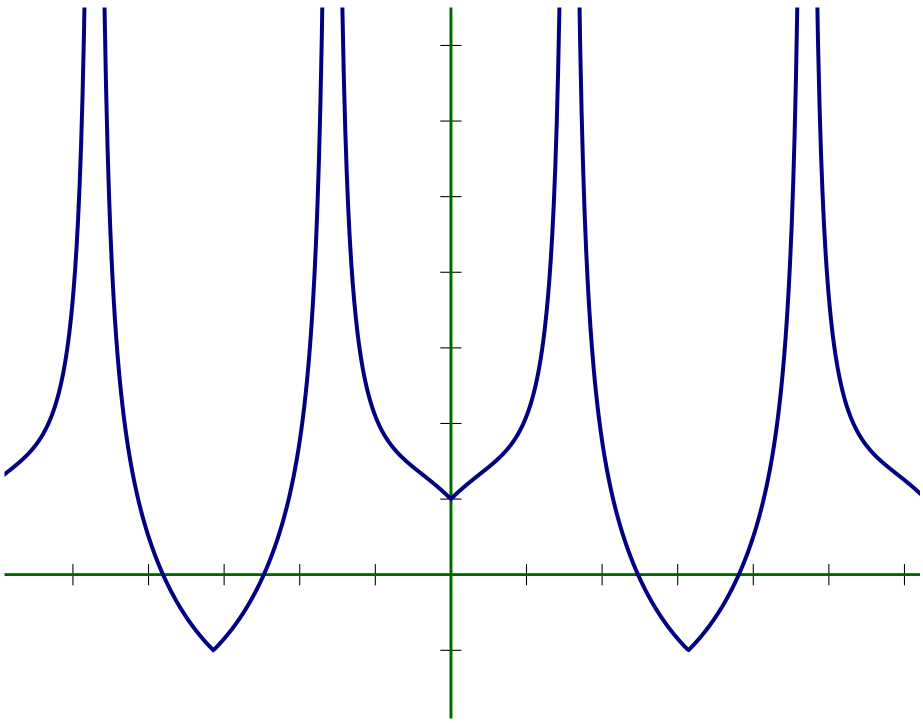
avec égalité si et seulement si $\sin x = \cos^2 x = 1$ ce qui est impossible.

Donc, f_4' est strictement positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et f_4 est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Pour $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_4(x) = -\tan x + \cos x$ et f_4 est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

On a immédiatement $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = +\infty$.

On en déduit $\mathcal{C}_4$.



Exercice 2 : Étude complète de $f : x \longmapsto (\cos(x) + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$.