Fichiers Logique a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon \implies a = 0$.

Exercice 2 : Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

1. L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
2. La fonction f est constante.

Exercice 3 : Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

1. Tout réel a (au moins) un antécédent par f.
2. La fonction f ne prend pas de valeur négative.

Exercice 4 : Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

1. Tout réel a (au moins) deux antécédents par f.
2. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Exercice 5 : Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2$
2. $\exists x \in \mathbb{N},\ 2 < x < 4$

Exercice 6 : Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$
2. $\forall x > 0, \exists y > 0,\ y < x$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N}, p = 2n$

Exercice 7 : Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N},\ n = 2p$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N},\ n(n+1) = 2p$

Exercice 8 : Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

1. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R}, x < y^2$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y > 0, y = \ln(x)$

Exercice de difficulté moyenne : ________________

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall\, \mathrm{M} > 0, \exists\, \mathrm{A} > 0, \forall\, x \geqslant \mathrm{A}, f(x) > \mathrm{M}$.
2. $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0, \forall\, (x, y) \in \mathrm{I}^2, |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0$.

Exercice 3 : Parmi les propositions suivantes, quelles sont les négations de la proposition

$$(\forall\, x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x))?$$

1. $\exists\, x \in \mathrm{E}, (\mathrm{Q}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(x))$,
2. $\exists\, x \in \mathrm{E}, (\rceil \mathrm{Q}(x) \Rightarrow \rceil \mathrm{P}(x))$,
3. $\exists\, x \notin \mathrm{E}, (\rceil \mathrm{Q}(x) \Rightarrow \rceil \mathrm{P}(x))$.

Exercice 4 : Parmi les propositions suivantes, quelles sont les négations de la proposition

$$(\forall\, x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{Q}(x))?$$

1. $\exists\, x \in \mathrm{E}, (\rceil \mathrm{Q}(x) \Rightarrow \rceil \mathrm{P}(x))$,
2. $\exists\, x \in \mathrm{E}, (\mathrm{P}(x) \wedge \rceil \mathrm{Q}(x))$,
3. $\exists\, x \notin \mathrm{E}, (\mathrm{P}(x) \wedge \rceil \mathrm{Q}(x))$,

Exercice 5 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. Que dire de f quand elle satisfait les affirmations suivantes ?

1. $\forall\, x \in \mathrm{E}, \forall\, y \in \mathrm{F}, f(x) = y$,
2. $\forall\, x \in \mathrm{E}, \exists\, y \in \mathrm{F}, f(x) = y$,
3. $\exists\, x \in \mathrm{E}, \forall\, y \in \mathrm{F}, f(x) = y$,
4. $\exists\, x \in \mathrm{E}, \exists\, y \in \mathrm{F}, f(x) = y$.

Exercice 6 : Soit $f : \mathrm{E} \longmapsto \mathrm{F}$. Que dire de f quand elle satisfait les affirmations suivantes ?

1. $\forall\, y \in \mathrm{F}, \forall\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$,
2. $\forall\, y \in \mathrm{F}, \exists\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$,
3. $\exists\, y \in \mathrm{F}, \forall\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$,
4. $\exists\, y \in \mathrm{F}, \exists\, x \in \mathrm{E}, f(x) = y$.

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ de réels vérifiant

$$0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n \leqslant 1.$$

On veut démontrer la propriété suivante : « il y a au moins deux de ces réels dont la distance est inférieure ou égale à $\frac{1}{n}$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété.
2. En déduire une formulation équivalente pour les valeurs $x_i - x_{i-1}$.
3. Écrire la négation de cette dernière proposition.
4. Démontrer la propriété.

Exercice 2 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même.

On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $f(n) = f_n(n) + 1$.

Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

Exercice 3 : Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

Exercice 4 : Soit a et b deux réels. Montrer que si $a+b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5 : Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, f(m+n) = f(n) + f(m).$$

Exercice 6 :

1. Exprimer $\cos\left((n+1)^\circ\right)$ en fonction de $\cos\left(n^\circ\right), \cos\left(1^\circ\right)$ et $\cos\left((n-1)^\circ\right)$.
2. Démontrer que $\cos\left(1^\circ\right)$ est irrationnel.