Nombres réels

I/ Calculs dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 (Enfantin) : Simplifier (factoriser) les expressions suivantes. On prendra bien garde à justifier l'existence de celles-ci et quelles valeurs donner $a \in \mathbb{R}$ pour leur bonne définition.

$\mathrm{A} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{18}}$.

$\mathrm{B} = \sqrt{2+\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}$.

$\mathrm{C} = \sqrt{(a+1)^2-4a} + \sqrt{(a-1)^2+4a}$.

$\mathrm{D} = \sqrt{a+1-2\sqrt{a}} + \sqrt{a+1+2\sqrt{a}}$.

$\mathrm{E} = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.

$\mathrm{F} = \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

$\mathrm{G} = (\sqrt{3}+1)\sqrt[3]{9-5\sqrt{3}} - (\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{9+5\sqrt{3}}$.

Les trois clés d'une bonne résolution :

1. *Le domaine de définition*
2. *On compare à* 0
3. *On factorise*

(4.) Accessoirement, on vérifie ses solutions.

Exercice 2 : Pour chaque équation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x^2+\sqrt{2}x-1=0$.
2. $(x-1)(x+2)(x+3)=(x+4)(x-2)(x+1)$.
3. $2x^3+x^2-5x+2=0$.
4. $x^4-2x^2-3x-2=0$
5. $6x^4-x^2-1=0$.
6. $6x^4-13x^3+12x^2-13x+6=0$.
7. $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$.
8. $x^6+\sqrt{2}x^3-\sqrt{3}x^3-\sqrt{6}=0$.
9. $\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^x+6=0$.
10. $\ln^2(x)-\ln(x)-2=0$
11. $4\ln^2(x)+8\ln(x)+3=0$.
12. $\mathrm{e}^{2x}+5\mathrm{e}^x+6=0$.
13. $\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^x+6=0$.

Exercice 3 : Pour chaque inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x^2 \leqslant 10$.
2. $x^2 \geqslant 2$.
3. $2 < (2x-3)^2 \leqslant \dfrac{25}{4}$
4. $(3x+1)^2 \leqslant 2(3x+1)(x+1)$
5. $x^4 + x^2 - 1 \geqslant 0$
6. $x^3 + 3x^2 - 4 < 0$
7. $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 8 > 0$
8. $\mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^x + 8 \leqslant 0$
9. $x \geqslant \dfrac{1}{x}$
10. $\dfrac{x}{x+1} \geqslant \dfrac{x+2}{x+3}$
11. $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{x+1}$
12. $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geqslant 1$
13. $\dfrac{2x-3}{x-2} - \dfrac{4x-1}{3x^2-2x-8} < \dfrac{65}{32}$
14. $\sqrt{3x^2 - 11x + 21} < 2x - 3$
15. $\sqrt{x} - \sqrt{2-x} \geqslant 1$
16. $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \geqslant \dfrac{3}{2}$
17. $x \leqslant 1 + \sqrt{x^2 - 2}$
18. $3x^2 - 3x - 4\sqrt{x^2 - x + 3} = 6$
19. $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$
20. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} \leqslant \sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$
21. $\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x}$

Exercice 4 : Soient x et y deux réels vérifiant $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$ et $|y+1| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Montrer que $\left|\dfrac{x}{y} + \dfrac{5}{6}\right| \leqslant \dfrac{2}{3}$.

Exercice 5 : Pour chaque équation ou inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions

1. $|x+3| = 5$
2. $|x+3| \leqslant 5$
3. $|x^2 - 6x + 4| < 1$
4. $|x^2 + x - 3| = |x|$
5. $|x+3| \leqslant |x^2 - 3|$.
6. $|2x-4| \leqslant |x+2|$
7. $|x+2| + |3x-1| = 4$
8. $|x+2| + |2x-1| + |x-3| \leqslant 8$.
9. $4x^2 - 7|x| + 3 = 0$.
10. $x + |x| = \dfrac{2}{x}$
11. $\dfrac{x}{x+1} \leqslant |2x+1| + 1$
12. $\sqrt{|x^2-4|} \leqslant |x-1|$

Exercice 6 : Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall\, x \in [-1\,;1]\,, \quad -1 \leqslant 4x^3 - 3x \leqslant 1$.
2. $\forall\, x, y \in [0\,;1[$ tels que $x \leqslant y$, $\quad \dfrac{x}{1-x} \leqslant \dfrac{y}{1-y}$.
3. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$.
4. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, $xy + yz + xz \leqslant x^2 + y^2 + z^2$
5. $\forall\, x, y \in]-1, 1[, \quad -1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.
6. $\forall\, x, y \in [0\,;1]$, $x^2 + y^2 - xy \leqslant 1$.

[0]. Un peu de chance ne fait pas de mal !

7. $\forall\, x,y \in \mathbb{R}_+,\ 1+\sqrt{xy} \leqslant \sqrt{1+x}\sqrt{1+y}$.
8. $\forall\, x,y \in \mathbb{R}, \quad |x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et $x \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$.
9. $\forall\, x,y \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}$.
10. $\forall\, x,y \in \mathbb{R}, \quad |x|+|y| \leqslant |x+y|+|x-y|$.
11. $\forall\, x,y \in \mathbb{R}, \quad 1+|xy-1| \leqslant (1+|x-1|)(1+|y-1|)$.

Exercice 7 (Inégalité de Young) : Soit $p,q>1$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

En étudiant la fonction $f : t \longmapsto f(t) = \dfrac{t^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}-ty$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que :

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}_+,\ x^py^q \leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.$$

Exercice 8 : Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin(x) \leqslant x$ puis $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x-1$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x+1 \leqslant \mathrm{e}^x$
4. $\forall\, x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[, \quad |x| \leqslant |\tan(x)|$
5. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left|\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\right| \leqslant |x|$
6. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |x-\sin(x)| \leqslant \dfrac{|x|^3}{6}$
7. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad x-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 9 : Le maximum de deux nombres x,y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x,y)$. De même on notera $\min(x,y)$ le plus petit des deux nombres x,y.

Démontrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

Exercice 10 : Soient x et y deux réels tels que $0<x\leqslant y$. On pose :

Moyenne arithmétique : $m = \dfrac{x+y}{2}$.

Moyenne harmonique : $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$.

Moyenne géométrique : $g = \sqrt{xy}$.

Moyenne quadratique : $q = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$.

Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant q \leqslant y$.

Exercice 11 (Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski) : Soient $a_1,\ldots, a_n, b_1,\ldots, b_n$ des nombres réels.

1. En considérant la fonction $f : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n}(a_k + xb_k)^2$, montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \qquad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

2. En déduire :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \qquad \text{(inégalité de Minkowski)}$$

Exercice 12 (Quelques majorations utiles dans les concours) :

1. Majorer par une constante $|1 - \cos(\theta)|$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Trouver $\varphi(\theta)$ dépendant de θ mais indépendant de x tel que :

$$\forall\, x \in]-1\,;1[\,,\ \forall\, \theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[\,,\ \frac{1}{\sqrt{1 - x^2\sin^2(\theta)}} \leqslant \varphi(\theta).$$

3. Soient α et $\beta \in [0\,;1[$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

   Montrer que $\forall\, x, y \geqslant 0$, $x^\alpha y^\beta \leqslant \alpha x + \beta y$.
4. Soit $a \in [0\,;1[$. Déterminer un majorant indépendant de t de $\left|\dfrac{t^n}{1+t^n}\right|$ pour $t \in [-a\,;a]$.
5. Montrer que $\forall\, t \in [0\,;1[$, $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant -\ln(1-t)$.

   En déduire $\forall\, \theta \in [0\,;\pi]$, $\forall\, t \in]0\,;1[$, $\left|\ln\left(t^2 - 2t\cos(\theta) + 1\right)\right| \leqslant 2\,|\ln(1-t)|$.

II/ Borne supérieure

Exercice 13 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $[0\,;1] \cap \mathbb{Q}$
2. $]0\,;1[\cap \mathbb{Q}$
3. $\mathbb{N}$
4. $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n^2} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 14 : Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Exercice 15 : Soient A et B deux parties majorées non vides de $\mathbb{R}$.

1. On note $A + B = \{a + b,\ (a\,;b) \in A \times B\}$.

   Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. On note $A - B = \{a - b,\ (a\,;b) \in A \times B\}$.

   Montrer que $A - B$ admet une borne supérieure, et que $\sup(A - B) = \sup(A) + \inf(B)$.
3. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

   Montrer que $\sup\{|x - y|,\ (x, y) \in A^2\} = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 16 (Autour de la borne sup d'un ensemble) :

Soit A un ensemble borné de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sup\{\lambda + a, a \in A\} = \lambda + \sup(A)$.
2. Montrer que pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\sup\{\lambda a, a \in A\} = \lambda \sup(A)$.
3. À quoi est égal $\sup\{\lambda a, a \in A\}$ si $\lambda < 0$?

Exercice 17 : Soit $f : [0\,;1] \longmapsto [0\,;1]$ une application croissante.

On pose $A = \{x \in [0\,;1]\,, f(x) \geqslant x\}$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure m.
2. Montrer que m est un point fixe de f *i.e.* $f(m) = m$.

III/ Partie entière

Exercice 18 : Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor 2x \rfloor \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\lfloor x \rfloor \end{array}$.

A-t-on $f \equiv g$?

Exercice 19 : Représenter la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 20 : Soit n un entier naturel.

1. Montrer que le nombre de chiffres $\kappa(n)$ de n dans son écriture décimale est :
$$\kappa(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$$
2. Quel est le nombre de chiffres de n dans son écriture en base b ?

Exercice 21 : Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (x \in \mathbb{Z}) \iff (\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor)$.

Exercice 22 : Montrer que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercice 23 : Résoudre l'équation
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor 2x + 3 \rfloor = \lfloor x + 2 \rfloor$$

Exercice 24 :

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la partie entière de $\mathrm{A} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{10000}}$.

Exercice 25 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n + 1$.

Exercice 26 : Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Exercice 27 : Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{b} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor = a.$$