Nombres réels

I/ Calculs dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 (Enfantin) : Simplifier (factoriser) les expressions suivantes. On prendra bien garde à justifier l'existence de celles-ci et quelles valeurs donner $a \in \mathbb{R}$ pour leur bonne définition.

$$A = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{18}}.$$

$$B = \sqrt{2+\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}.$$

$$C = \sqrt{(a+1)^2-4a}+\sqrt{(a-1)^2+4a}.$$

$$D = \sqrt{a+1-2\sqrt{a}}+\sqrt{a+1+2\sqrt{a}}.$$

$$E = \sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}.$$

$$F = \sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}.$$

$$G = (\sqrt{3}+1)\sqrt[3]{9-5\sqrt{3}}-(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{9+5\sqrt{3}}.$$

Correction :

$$A = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)}{-6} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{2+\sqrt{3}}\underbrace{(\sqrt{3}-1)}_{>0}\sqrt{2} = \sqrt{2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \sqrt{2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)} \\ &= 2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = 2\sqrt{4-3} = 2. \end{aligned}$$

$$C = \sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+1)^2} = \begin{cases} 2a & \text{si } a \in [1\,;+\infty[\\ 2 & \text{si } a \in [-1\,;1] \\ -2a & \text{si } a \in]-\infty\,;-1]\,. \end{cases}$$

$$D = \sqrt{\left(\underbrace{\sqrt{a}}_{a\in\mathbb{R}_+}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\underbrace{\sqrt{a}}_{a\in\mathbb{R}_+}+1\right)^2} = \begin{cases} 2 & \text{si } a \in [0\,;1] \\ 2\sqrt{a} & \text{si } a \in [1\,;+\infty[\,. \end{cases}$$

$$E = \sqrt{\underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{a-1}}_{a\geqslant 1}+1\right)^2}_{\geqslant 0}}+\sqrt{\left(\underbrace{\sqrt{a-1}}_{a\geqslant 1}-1\right)^2} = \begin{cases} 2\sqrt{a-1} & \text{si } a \in [2\,;+\infty[\\ 2 & \text{si } a \in [1\,;2]\,. \end{cases}$$

$$F = \sqrt{\left(\underbrace{\sqrt{5}-2}_{\geqslant 0}\right)^2}+\sqrt{\left(\underbrace{\sqrt{5}+2}_{\geqslant 0}\right)^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$G = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3\left(9-5\sqrt{3}\right)}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-1\right)^3\left(9+5\sqrt{3}\right)} = \sqrt[3]{4\sqrt{3}}-\sqrt[3]{4\sqrt{3}} = 0.$$

Nombres réels

Les trois clés d'une bonne résolution :

1. *Le domaine de définition*
2. *On compare à* 0
3. *On factorise*

(4.) Accessoirement, on vérifie ses solutions.

Exercice 2 : Pour chaque équation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions.

1. $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$.
2. $(x-1)(x+2)(x+3) = (x+4)(x-2)(x+1)$.
3. $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$.
4. $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$
5. $6x^4 - x^2 - 1 = 0$.
6. $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$.
7. $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.
8. $x^6 + \sqrt{2}x^3 - \sqrt{3}x^3 - \sqrt{6} = 0$.
9. $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 6 = 0$.
10. $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 = 0$
11. $4\ln^2(x) + 8\ln(x) + 3 = 0$.
12. $\mathrm{e}^{2x} + 5\mathrm{e}^x + 6 = 0$.
13. $\mathrm{e}^{3x} - 2\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 6 = 0$.

Correction :

1. $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \right\}$.
2. Développer c'est mal sauf quand on ne sait rien faire d'autre :

$$(x-1)(x+2)(x+3) = (x+4)(x-2)(x+1) \iff 4x^2+x-6 = 3x^2-6x-8 \iff x^2+7x+2=0.$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{-7 \pm \sqrt{41}}{2} \right\}$.

3. $2x^3+x^2-5x+2 = 2(x-1)\left(x^2+\dfrac{3}{2}x-1\right) = 2(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+2) = (x-1)(2x-1)(x+2)$.

Donc, $\mathcal{S} = \left\{ -2, \dfrac{1}{2}, 1 \right\}$.

4. $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = (x+1)(x-2)\underbrace{(x^2+x+1)}_{\Delta<0}$. Donc, $\mathcal{S} = \{-1, 2\}$.
5. $6x^4 - x^2 - 1 = (2x^2-1)\underbrace{(3x^2+1)}_{\Delta<0} = (3x^2+1)\left(\sqrt{2}x-1\right)\left(\sqrt{2}x+1\right)$. Donc, $\mathcal{S} = \left\{ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \right\}$.
6. $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6$ est un exemple de polynômes symétriques. Ceux-ci se factorisent en posant $\mathrm{X} = x + \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ après avoir vérifié que 0 n'était pas solution et en remarquant que $\mathrm{X}^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2$:

$$\begin{aligned}
6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 &= x^2\left(6x^2 - 13x + 12 - 13\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2}\right) \\
&= x^2\left(6\mathrm{X}^2 - 12 - 13\mathrm{X} + 12\right) = x^2\left(6\mathrm{X}^2 - 13\mathrm{X}\right) \\
&= x\mathrm{X}(6x\mathrm{X} - 13x) \qquad \text{(On revient à } x\text{)} \\
&= (x^2+1)(6x^2+6-13x) \\
&= (x^2+1)(2x-3)(3x-2).
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3} \right\}$.

7. De même,

$$\begin{aligned}x^4+3x^3+4x^2+3x+1 &= x^2\left(x^2+3x+4+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\ &= x^2\left(\mathrm{X}^2-2+3\mathrm{X}+4\right)=x^2\left(\mathrm{X}^2+3\mathrm{X}+2\right)\\ &= x\left(\mathrm{X}+1\right)x\left(\mathrm{X}+2\right)\\ &= (x^2+x+1)(x^2+2x+1) \qquad \text{(On revient à } x\text{)}\\ &= (x^2+x+1)(x+1)^2.\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S}=\{-1\}$.

8. À peine camouflé :

$$x^6+\sqrt{2}x^3-\sqrt{3}x^3-\sqrt{6}=\left(x^3+\sqrt{2}\right)\left(x^3-\sqrt{3}\right)$$

En reconnaissant $a^3\pm b^3$, on factorise les deux facteurs.

$$\begin{aligned}&= \left(x+\sqrt[6]{2}\right)\left(x^2-x\sqrt[6]{2}+\sqrt[3]{2}\right)\left(x-\sqrt[6]{3}\right)\left(x^2+x\sqrt[6]{3}+\sqrt[3]{3}\right)\\ &= \left(x+\sqrt[6]{2}\right)\underbrace{\left(x^2-x\sqrt[6]{2}+\sqrt[3]{2}\right)}_{\Delta=-3\sqrt[3]{2}<0}\left(x-\sqrt[6]{3}\right)\underbrace{\left(x^2+x\sqrt[6]{3}+\sqrt[3]{3}\right)}_{\Delta<0}\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S}=\left\{\sqrt[6]{2},\sqrt[6]{3}\right\}$.

9. $\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^x+6=\left(\mathrm{e}^x-2\right)\left(\mathrm{e}^x-3\right)$. Donc, $\mathcal{S}=\{\ln(2),\ln(3)\}$.

10. $\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln^2(x)-\ln(x)-2=(\ln(x)-2)(\ln(x)+1)$. Donc, $\mathcal{S}=\left\{\mathrm{e}^2,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right\}$.

11. $\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*$, $4\ln^2(x)+8\ln(x)+3=(2\ln(x)+1)(2\ln(x)+3)$. Donc, $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^3}}\right\}$.

12. $\mathrm{e}^{2x}+5\mathrm{e}^x+6=0$. Une somme d'exponentielle nulle ????

13. $\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}-5\mathrm{e}^x+6=\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^x-3\right)\left(\mathrm{e}^x+2\right)$

Donc, $\mathcal{S}=\{0,\ln(3)\}$.

Exercice 3 : Pour chaque inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x\in\mathbb{R}$ solutions.

1. $x^2\leqslant 10$.
2. $x^2\geqslant 2$.
3. $2<(2x-3)^2\leqslant\dfrac{25}{4}$
4. $(3x+1)^2\leqslant 2(3x+1)(x+1)$
5. $x^4+x^2-1\geqslant 0$
6. $x^3+3x^2-4<0$
7. $\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x-8>0$
8. $\mathrm{e}^{2x}+6\mathrm{e}^x+8\leqslant 0$
9. $x\geqslant\dfrac{1}{x}$
10. $\dfrac{x}{x+1}\geqslant\dfrac{x+2}{x+3}$
11. $\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{x+1}$
12. $\dfrac{x+5}{x^2-1}\geqslant 1$
13. $\dfrac{2x-3}{x-2}-\dfrac{4x-1}{3x^2-2x-8}<\dfrac{65}{32}$
14. $\sqrt{3x^2-11x+21}<2x-3$
15. $\sqrt{x}-\sqrt{2-x}\geqslant 1$
16. $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\geqslant\dfrac{3}{2}$
17. $x\leqslant 1+\sqrt{x^2-2}$
18. $3x^2-3x-4\sqrt{x^2-x+3}=6$
19. $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\dfrac{1}{2}$
20. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}\leqslant\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$
21. $\sqrt{6-x}+\sqrt{3-x}=\sqrt{x+5}+\sqrt{4-3x}$

Correction : **ATTENTION** aux domaines de définition !

1. $\mathcal{S} = \left[-\sqrt{10}\,;\sqrt{10}\right]$.
2. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$.
3. Comme $2 < u^2 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \iff u \in \left[-\dfrac{5}{2}\,;-\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}\,;\dfrac{5}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} 2 < (2x-3)^2 \leqslant \frac{25}{4} &\iff -\frac{5}{2} \leqslant 2x-3 < -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2} < 2x-3 \leqslant \frac{5}{2} \\ &\iff \frac{1}{4} \leqslant x < \frac{3-\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{3+\sqrt{2}}{2} < x \leqslant \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

   Donc, $\mathcal{S} = \left[\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{11}{4}\right]$.
4. $(3x+1)^2 \leqslant 2(3x+1)(x+1) \iff (3x+1)(x-1) \leqslant 0$. Donc, $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{1}{3}\,;1\right]$.
5. $$\begin{aligned} x^4+x^2-1 &= \left(x^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x^2 - \underbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{<0}\right) \\ &= \left(x - \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

   Donc, $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\,;+\infty\right[$.
6. $x^3+3x^2-4 = (x-1)(x+2)^2$. Donc, $\mathcal{S} =]-\infty\,;1[$.
7. $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 8 = (\mathrm{e}^x - 4)(\mathrm{e}^x + 2)$. Donc, $\mathcal{S} =]2\ln(2)\,;+\infty[$.
8. Donc, $\mathcal{S} = \varnothing$.
9. $\mathcal{S} = [-1\,;0[\cup [1\,;+\infty[$.
10. Pour $x \neq -1, -3$, $\dfrac{x}{x+1} \geqslant \dfrac{x+2}{x+3} \iff \dfrac{-2}{(x+1)(x+3)} \geqslant 0$. $\mathcal{S} =]-3\,;-1[$.
11. Pour ne pas faire de bêtises, le mieux est de factoriser et de résoudre, pour $x \neq 0, -1$:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leqslant 0 \iff \frac{1}{x(x+1)} \leqslant 0.$$

   $\mathcal{S} =]-1\,;0[$.
12. Pour $x \neq \pm 1$, $\dfrac{x+5}{x^2-1} - 1 = \dfrac{-(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$. Un tableau de signes permet de conclure :

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
$-(x+2)(x-3)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x-1)(x+1)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$-\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

   Donc, $\mathcal{S} = [-2\,;-1[\cup]1\,;3]$.

13. Comme $3x^2-2x-8=(x-2)\,(3x+4)$, on ne résout l'inéquation que pour $x\neq 2,-\dfrac{4}{3}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x-3}{x-2}-\frac{4x-1}{(x-2)\,(3x+4)}<\frac{65}{32} &\iff \frac{2x-3}{x-2}-\frac{4x-1}{(x-2)\,(3x+4)}-\frac{65}{32}<0\\
&\iff \frac{32(2x-3)(3x+4)-32(4x-1)-65\,(x-2)\,(3x+4)}{(x-2)\,(3x+4)}<0\\
&\iff \frac{-3x^2-30x+168}{(x-2)\,(3x+4)}<0\\
&\iff \frac{-3(x-4)(x+14)}{(x-2)\,(3x+4)}<0
\end{aligned}$$

On conclut à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		-14		$-\frac{4}{3}$		2		4		$+\infty$
$-3(x-4)(x+14)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x-2)\,(3x+4)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$-\dfrac{3(x-4)(x+14)}{(x-2)\,(3x+4)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc, $\mathcal{S}=]-\infty\,;-14[\,\cup\left]-\dfrac{4}{3}\,;2\right[\cup\,]4\,;+\infty[$.

14. Comme $3x^2-11x+21$ ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$, l'inéquation est correctement définie. Les deux membres étant positifs, cela impose $x\in\left]\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$. On compare leur carré sous cette condition :

$$\begin{aligned}
\sqrt{3x^2-11x+21}<2x-3 &\iff 3x^2-11x+21<4x^2-12x+9\\
&\iff 0<x^2-x-12\\
&\iff 0<(x+3)(x-4).
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S}=\Big(\,]-\infty\,;-3[\,\cup\,]4\,;+\infty[\,\Big)\cap\left]\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[=\,]4\,;+\infty[$.

15. Pour $x\in[0\,;2]$, $\sqrt{x}-\sqrt{2-x}\geqslant 1$
$$\begin{aligned}
&\iff 0<\sqrt{2-x}\leqslant\sqrt{x}-1\\
&\iff 2-x\leqslant x+1-2\sqrt{x}\\
&\iff 0\leqslant 2x-2\sqrt{x}-1\\
&\iff 0\leqslant 2\left(\sqrt{x}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{x}-\underbrace{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}_{<0}\right).
\end{aligned}$$

Avec $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\in[0\,;2]$, on obtient $\mathcal{S}=\left[\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\,;2\right]$.

16. Pour $x \in [0\,;2]$, $\sqrt{x}+\sqrt{2-x} \geqslant \dfrac{3}{2} \iff -\sqrt{2-x} \leqslant -\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{x}\right) < 0$ car $x \leqslant 2$.

$$\begin{aligned}
&\iff 2-x \geqslant \frac{9}{4}+x-3\sqrt{x} \quad \text{(par décroissance de } x \longmapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_-)\\
&\iff 0 \geqslant 2x-3\sqrt{x}+\frac{1}{4}\\
&\iff 0 \geqslant 2\left(\sqrt{x}-\frac{3+\sqrt{7}}{4}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{3-\sqrt{7}}{4}\right).
\end{aligned}$$

Avec $\left(\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \dfrac{8\pm3\sqrt{7}}{8} \in [0\,;2]$, on obtient $\mathcal{S} = \left[\dfrac{8-3\sqrt{7}}{8}\,;\dfrac{8+3\sqrt{7}}{8}\right]$.

17. Pour $x \in \left]-\infty\,;-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$, il est clair que parmi ces éléments tous ceux de $]-\infty\,;1]$ sont solutions.

Pour $x \geqslant \sqrt{2}\,(>1)$, $x-1 \geqslant 0$ et par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$x \leqslant 1+\sqrt{x^2-2} \iff x^2-2x+1 \leqslant x^2-2 \iff -2x+1 \leqslant -2 \iff \left(\sqrt{2}<\right)\frac{3}{2} \leqslant x.$$

Donc, $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\sqrt{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

18. Pour ce genre d'équation où il peut être fastidieux de trouver d'abord les domaines de définition puis résoudre, on peut raisonner par analyse-synthèse *i.e.* résoudre sans se poser de questions en supposant l'existence de solutions puis, durant la synthèse, vérifier que ces dernières sont admissibles ou non.

Supposons donc l'existence de telles solutions. Alors nécessairement :

$$\begin{aligned}
3x^2-3x-4\sqrt{\underbrace{x^2-x+3}_{>0 \text{ car } \Delta<0}} = 6 &\iff \left(3x^2-3x-6\right)^2 = 16(x^2-x+3)\\
&\iff 9x^4-18x^3-43x^2+52x-12=0\\
&\iff 3(x+2)(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=0\ {}^{[1]}\\
&\iff (x+2)(x-3)\,(3x-1)\,(3x-2)=0
\end{aligned}$$

On a donc 4 solutions potentielles qui doivent rendre positif le trinôme x^2-x+3. Ici, le discriminant étant négatif, elles conviennent toutes.

Donc, $\mathcal{S} = \left\{-2, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, 3\right\}$.

19. On ne raisonne que pour $x \in]-\infty\,;3] \cap [-1\,;+\infty[= [-1\,;3]$. Pour de tels x, on a :

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1} > \frac{1}{2} \iff \sqrt{3-x} > \frac{1}{2}+\sqrt{x+1} > 0$$

Par croissance de $x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
&\iff \underbrace{3-x}_{\geqslant 0} > \frac{1}{4} + \underbrace{x+1}_{\geqslant 0} + \sqrt{x+1} \\
&\iff -2x + \frac{7}{4} > \sqrt{x+1} > 0 \\
&\iff 4x^2 - 7x + \frac{49}{16} > x+1 \\
&\iff 4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0 \iff x^2 - 2x + \frac{33}{64} > 0 \\
&\iff \left(x - \frac{2 - \frac{\sqrt{31}}{4}}{2}\right)\left(x - \frac{2 + \frac{\sqrt{31}}{4}}{2}\right) > 0 \\
&\iff \left(x - \underbrace{\frac{8-\sqrt{31}}{8}}_{\in[-1;3]}\right)\left(x - \underbrace{\frac{8+\sqrt{31}}{8}}_{\in[-1;3]}\right) > 0
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left[-1\,;\frac{8-\sqrt{31}}{8}\right[\cup \left]\frac{8+\sqrt{31}}{8}\,;3\right]$.

20. D'abord les domaines de définition :

$$x \in \mathcal{D} = \Big(]-\infty\,;-2[\cup[-1\,;+\infty[\Big) \cap \Big(]-\infty\,;1[\cup[2\,;+\infty[\Big) =]-\infty\,;-2[\cup[-1\,;1[\cup]2\,;+\infty[.$$

Pour ceux-ci, les deux membres étant positifs :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \leqslant \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} &\iff \frac{x+1}{x+2} \leqslant \frac{x-2}{x-1} \\
&\iff \frac{x^2-1-x^2+4}{(x+2)(x-1)} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{3}{(x+2)(x-1)} \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} =]-2\,;1[\cap\mathcal{D} = [-1\,;1[$.

21. Encore et toujours le domaine de définition. Après calculs, on trouve $\mathcal{D} = \left[-5\,;\frac{4}{3}\right]$.

Les expressions sous les racines étant positives, on peut élever au carré :

$$\begin{aligned}
\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x} &\iff 9 - 2x + 2\sqrt{(6-x)(3-x)} = -2x + 9 + 2\sqrt{(x+5)(4-3x)} \\
&\iff \sqrt{(6-x)(3-x)} = \sqrt{(x+5)(4-3x)} \qquad \text{(Oui ! c'est fait exprès)} \\
&\iff (6-x)(3-x) = (x+5)(4-3x) \\
&\iff 4x^2 + 2x - 2 = 0 \\
&\iff (2x-1)(x+1) = 0.
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\} \cap \mathcal{D} = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 4 : Soient x et y deux réels vérifiant $\left|x-\dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$ et $|y+1| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Montrer que $\left|\dfrac{x}{y}+\dfrac{5}{6}\right| \leqslant \dfrac{2}{3}$.

Correction : Exercice trivial dont la difficulté n'est que votre capacité à manier correctement les inégalités :

$$\begin{aligned}
\left|x-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{4} &\iff -\frac{1}{4} \leqslant x-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4} \\
&\iff 0<\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4} && \text{(XI.1)} \\
|y+1| \leqslant \frac{1}{2} &\iff -\frac{3}{2} \leqslant y \leqslant -\frac{1}{2} \\
&\iff 0<\frac{2}{3} \leqslant -\frac{1}{y} \leqslant 2 && \text{(XI.2)}
\end{aligned}$$

On peut multiplier (XI.1) et (XI.2) car toutes deux positives,

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{1}{6} \leqslant -\frac{x}{y} \leqslant \frac{3}{2} \\
&\iff -\frac{4}{6} \leqslant -\frac{x}{y}-\frac{5}{6} \leqslant \frac{4}{6} \\
&\iff \left|\frac{x}{y}+\frac{5}{6}\right| \leqslant \frac{2}{3}. && \text{(XI.3)}
\end{aligned}$$

Exercice 5 : Pour chaque équation ou inéquation, déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions

1. $|x+3|=5$
2. $|x+3| \leqslant 5$
3. $\left|x^2-6x+4\right|<1$
4. $\left|x^2+x-3\right|=|x|$
5. $|x+3| \leqslant \left|x^2-3\right|$.
6. $|2x-4| \leqslant |x+2|$
7. $|x+2|+|3x-1|=4$
8. $|x+2|+|2x-1|+|x-3| \leqslant 8$.
9. $4x^2-7|x|+3=0$.
10. $x+|x|=\dfrac{2}{x}$
11. $\dfrac{x}{x+1} \leqslant |2x+1|+1$
12. $\sqrt{\left|x^2-4\right|} \leqslant |x-1|$

Correction : On se rappellera que, d'une manière générale, une équation ou inéquation avec des valeurs absolues se ramène à deux équations ou inéquations.

1. $|x+3|=5 \iff x+3=5$ ou $x+3=-5$. Donc $\mathcal{S}=\{-8,2\}$.
2. $|x+3| \leqslant 5 \iff -5 \leqslant x+3 \leqslant 5$. Donc $\mathcal{S}=[-8\,;2]$.
3. $\left|x^2-6x+4\right|<1 \iff -1<x^2-6x+4<1 \iff 0<x^2-6x+5$ et $x^2-6x+3<0$.

   Comme $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$ et $x^2-6x+3=\left(x-3-\sqrt{6}\right)\left(x-3+\sqrt{6}\right)$, on obtient :

   $$\mathcal{S}=\Big(\left]-\infty\,;1\right[\cup\left]5\,;+\infty\right[\Big) \cup \Big]\underbrace{3-\sqrt{6}}_{<1}\,;\underbrace{3+\sqrt{6}}_{>5}\Big[=\left]3-\sqrt{6}\,;1\right[\cup\left]5\,;3+\sqrt{6}\right[.$$

4. En supprimant les équations surnuméraires, on a :

$$\left|x^2+x-3\right| = |x| \iff x^2+x-3 = x \quad \text{ou} \quad x^2+x-3=-x.$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\pm\sqrt{3}, -3, 1\right\}$.

5. Après avoir vérifié que $x=3$ était solution, pour $x \neq 3$, on a :

$$|x+3| \leqslant \left|x^2-3\right| \iff 1 \leqslant |x-3| \iff 1 \leqslant x-3 \text{ ou } x-3 \leqslant -1 \iff 4 \leqslant x \text{ ou } x \leqslant 2.$$

Donc, $\mathcal{S} =]-\infty\,;2] \cup [4\,;+\infty[$.

6. $$\begin{aligned} |2x-4| \leqslant |x+2| &\iff -|x+2| \leqslant 2x-4 \leqslant |x+2| \\ &\iff -2x+4 \leqslant |x+2| \text{ et } 2x-4 \leqslant |x+2| \\ &\iff \Big(-2x+4 \leqslant x+2 \text{ ou } x+2 \leqslant 2x-4\Big) \\ &\qquad \text{et } \Big(2x-4 \leqslant x+2 \text{ ou } x+2 \leqslant -2x+4\Big) \\ &\iff \left(\frac{2}{3} \leqslant x \text{ ou } 6 \leqslant x\right) \text{ et } \left(x \leqslant 6 \text{ ou } x \leqslant \frac{2}{3}\right) \\ &\iff \frac{2}{3} \leqslant x \text{ et } x \leqslant 6. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left[\frac{2}{3}\,;6\right]$.

Il peut être difficile de ne pas faire d'erreurs en maniant des inégalité et des conditions logiques. Ici aussi, un tableau assimilé à un tableau de signes peut s'avérer très efficace et c'est la méthode que je vous conseille :

x	$-\infty$	-2		2		$+\infty$
$\lvert 2x-4\rvert$	$4-2x$		$4-2x$	0	$2x-4$	
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$	
$\lvert 2x-4\rvert \leqslant \lvert x+2\rvert$	$4-2x \leqslant -x-2$ $6 \leqslant x$		$4-2x \leqslant x+2$ $\frac{2}{3} \leqslant x$		$2x-4 \leqslant x+2$ $x \leqslant 6$	
$\mathcal{S}$	$\emptyset$		$\left[\frac{2}{3}\,;2\right]$		$[2\,;6]$	

Donc, $\mathcal{S} = \left[\frac{2}{3}\,;6\right]$.

7. Restons avec notre tableau :

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$
$\lvert 3x-1\rvert$	$1-3x$		$1-3x$	0	$3x-1$
$\lvert x+2\rvert+\lvert 3x-1\rvert=4$	$-4x-1=4$ $x=-\frac{4}{5}$		$-2x+3=4$ $x=-\frac{1}{2}$		$4x+1=4$ $x=\frac{3}{4}$
$\mathcal{S}$	$\emptyset$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$

Donc, $\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right\}$.

8. Pareil avec une ligne supplémentaire :

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$		$x+2$
$\lvert 2x-1\rvert$	$1-2x$		$1-2x$	0	$2x-1$		$2x-1$
$\lvert x-3\rvert$	$3-x$		$3-x$		$3-x$	0	$x-3$
$\lvert x+2\rvert+\lvert 2x-1\rvert+\lvert x-3\rvert\leqslant 8$	$-4x+2\leqslant 8$ $-\frac{3}{2}\leqslant x$		$-2x+6\leqslant 8$ $-1\leqslant x$		$2x+4\leqslant 8$ $x\leqslant 2$		$4x-2\leqslant 8$ $x\leqslant\frac{5}{2}$
$\mathcal{S}$	$\emptyset$		$\left[-1\,;\frac{1}{2}\right]$		$\left[\frac{1}{2}\,;2\right]$		$\emptyset$

Donc, $\mathcal{S}=[-1\,;2]$.

9. $$4x^2-7|x|+3=0 \iff 4x^2-7x+3=0 \text{ ou } 4x^2+7x+3=0$$
$$\iff (x-1)(4x-3)=0 \text{ ou } (x+1)(4x+3)=0.$$

Donc, $\mathcal{S}=\left\{-1,-\frac{3}{4},1,\frac{3}{4}\right\}$.

Commentaires : *Par parité, il était évident que l'on trouverait des racines opposées.*

10. Pour $x\neq 0$, $x+|x|=\frac{2}{x} \iff \begin{cases} 2x=\frac{2}{x} & \text{si } x>0 \\ 0=\frac{2}{x} & \text{si } x<0 \end{cases}$.
$$\iff x^2=1 \text{ et } x>0 \iff \big(x=1 \text{ ou } x=-1\big) \text{ et } x>0$$

Donc, $\mathcal{S}=\{1\}$.

11. Pour $x\neq -1$, $\frac{x}{x+1}\leqslant|2x+1|+1 \iff -\frac{1}{x+1}\leqslant|2x+1|$
$$\iff -\frac{1}{x+1}\leqslant 2x+1 \text{ ou } 2x+1\leqslant\frac{1}{x+1}$$
$$\iff 0\leqslant\frac{\overbrace{2x^2+3x+2}^{\Delta<0}}{x+1} \text{ ou } \frac{x(2x+3)}{x+1}\leqslant 0$$
$$\iff$$

Comme à l'accoutumée, un petit tableau de signes pour la dernière inégalité :

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$x(2x+3)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x(2x+3)}{x+1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc, $\mathcal{S} = [-1\,;+\infty[\cup \left]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right] \cup]-1\,;0] = \left]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right] \cup [-1\,;+\infty[$.

12. Par la présence de la valeur absolue sous la racine, l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. On peut élever au carré :

$$\begin{aligned}
\sqrt{|x^2-4|} \leqslant |x-1| &\iff |x^2-4| \leqslant (x-1)^2 \\
&\iff x^2-4 \leqslant (x-1)^2 \text{ et } -(x-1)^2 \leqslant x^2-4 \\
&\iff 0 \leqslant -2x+5 \text{ et } 0 \leqslant 2x^2-2x-3 \\
&\iff x \leqslant \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \left(x - \underbrace{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}_{<\frac{5}{2}}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\dfrac{5}{2}\right] \cap \left(\left]-\infty\,;\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\,;+\infty\right[\right) = \left]-\infty\,;\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\,;\dfrac{5}{2}\right]$.

Exercice 6 : Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall\, x \in [-1\,;1]\,, \quad -1 \leqslant 4x^3-3x \leqslant 1$.
2. $\forall\, x, y \in [0\,;1[$ tels que $x \leqslant y, \quad \dfrac{x}{1-x} \leqslant \dfrac{y}{1-y}$.
3. $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$.
4. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R},\ xy+yz+xz \leqslant x^2+y^2+z^2$
5. $\forall\, x, y \in]-1, 1[, \quad -1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.
6. $\forall\, x, y \in [0\,;1],\ x^2+y^2-xy \leqslant 1$.
7. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+,\ 1+\sqrt{xy} \leqslant \sqrt{1+x}\sqrt{1+y}$.
8. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad |x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et $x \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$.
9. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}$.
10. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad |x|+|y| \leqslant |x+y|+|x-y|$.
11. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad 1+|xy-1| \leqslant (1+|x-1|)(1+|y-1|)$.

[1]. Un peu de chance ne fait pas de mal !

Correction :

1. Une étude rapide de la fonction $\varphi : x \longmapsto 4x^3 - 3x$ dérivable sur $[-1\,;1]$ dont la dérivée est $\varphi' : x \longmapsto 3(2x-1)(2x+1)$ permet d'avoir les variations sur $[-1\,;1]$ est l'encadrement voulu.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
φ	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Donc $\forall\, x \in [-1\,;1]$, $-1 \leqslant 4x^3 - 3x \leqslant 1$.

2. La fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{1-t}$ est définie et croissante sur $[0\,;1[$.

donc $\forall\, x, y \in [0\,;1[\,,\ x \leqslant y \implies \dfrac{x}{1-x} \leqslant \dfrac{y}{1-y}$.

3. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \implies xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

4. Il suffit de sommer et simplifier l'inégalité précédente :

$$xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$$
$$yz \leqslant \frac{y^2+z^2}{2}$$
$$xz \leqslant \frac{x^2+z^2}{2}$$
$$xy + yz + xz \leqslant x^2 + y^2 + z^2.$$

5. $\forall\, x, y \in \,]-1\,;1[$, $|xy| < 1$ donc $f(x\,;y) = \dfrac{x+y}{1+xy}$ est correctement défini.

On a tout d'abord $\dfrac{x+y}{1+xy} - 1 = \dfrac{x+y-1-xy}{1+xy} = \dfrac{(x-1)(1-y)}{1+xy} < 0$ si $x, y \in \,]-1\,;1[$.

Enduite, $\dfrac{x+y}{1+xy} + 1 = \dfrac{x+y+1+xy}{1+xy} = \dfrac{(x+1)(1+y)}{1+xy} > 0$ si $x, y \in \,]-1\,;1[$.

Dans tous les cas, $x, y \in \,]-1\,; \implies [-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.

6. Sur $[0\,;1]$, $x^2 + y^2 \leqslant x + y$.

D'après la question précédente, on sait qu'alors $x + y \leqslant 1 + xy$ d'où le résultat.

7. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, comparons les carrés de ces expressions positives $1 + xy + 2\sqrt{xy}$ et $(1+x)(1+y) = 1 + xy + x + y$ *i.e.* $2\sqrt{xy}$ et $x + y$.

Comme $0 \leqslant \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x + y - 2\sqrt{xy}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a clairement $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$ et le résultat par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+,\ 1 + \sqrt{xy} \leqslant \sqrt{1+x}\sqrt{1+y}.$$

On conclut avec la croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}+$,

8. Il est assez clair que $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2} = |x| \geqslant x$ par définition de la valeur absolue.
9. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant 2\sqrt{xy} \implies 0 \leqslant x+y \leqslant x+2\sqrt{xy}+y = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$.

   Par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit : $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}$.
10. Pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, l'inégalité triangulaire s'écrit $|u+v| \leqslant |u|+|v|$.

    Pour $u = x+y$ et $v = x-y$, on obtient $2\,|x| \leqslant |x+y|+|x-y|$.

    Et pour $u = y+x$ et $v = y-x$, $2\,|y| \leqslant |x+y|+|x-y|$.

    Il ne reste plus qu'à sommer et simplifier :

    $$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |x|+|y| \leqslant |x+y|+|x-y|\,.$$
11. Expressions factorisées, l'idée vient ... de la factorisation : $1+a+b+ab = (1+a)(1+b)$. En faisant apparaître les termes qui nous intéressent, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, on a :

    $$xy-1 = (x-1)(y-1)+(x-1)+(y-1)$$

    D'après l'inégalité triangulaire,

    $$\begin{aligned} |xy-1| &\leqslant |x-1|\,|y-1|+|x-1|+|y-1| \\ 1+|xy-1| &\leqslant |x-1|\,|y-1|+|x-1|+|y-1|+1 \\ 1+|xy-1| &\leqslant (1+|x-1|)\,(1+|y-1|)\,. \end{aligned}$$

Exercice 7 (Inégalité de Young) : Soit $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$.

En étudiant la fonction $f : t \longmapsto f(t) = \dfrac{t^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}-ty$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+,\ x^p y^q \leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.$$

Correction : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$, on a $f'(t) = t^{p-1}-y$ qui s'annule pour $t = y^{\frac{1}{p-1}}$.

On en déduit le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$:

t	0		$y^{\frac{1}{p-1}}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f	$\dfrac{y^q}{q}$	$\searrow$	$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f atteint donc un minimum en $y^{\frac{1}{p-1}}$ qui vaut

$$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}+1} = \frac{y^q}{q} + y^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{1}{p} - 1\right) = \frac{1}{q}\left(y^q - y^{\frac{p}{p-1}}\right) = 0.$$

Remarque : $\dfrac{p-1}{p} = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q}$ d'où $\dfrac{p}{p-1} = q$.

On en déduit que $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$, $ty \leqslant \dfrac{t^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ et pour $t = x$, on obtient finalement :

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Commentaires : *Cette formule se démontre plus élégamment en utilisant la convexité de la fonction exponentielle :*

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \lambda \in [0\,;1],\ \ \mathrm{e}^{\lambda a + (1-\lambda) b} \leqslant \lambda\,\mathrm{e}^a + (1-\lambda)\,\mathrm{e}^b.$$

Avec $1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, *on a :*

$$\begin{aligned} \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ xy &= \mathrm{e}^{\ln(xy)} = \mathrm{e}^{\ln(x)+\ln(y)} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q)} \end{aligned}$$

En vérifiant bien que $\dfrac{1}{p} \in [0\,;1]$ *et* $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} &\leqslant \frac{1}{p}\mathrm{e}^{\ln(x^p)} + \frac{1}{q}\mathrm{e}^{\ln(y^p)} \\ &= \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \end{aligned}$$

L'inégalité restant vraie si $x = 0$ *ou* $y = 0$.

Exercice 8 : Démontrer les inégalités suivantes.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\quad \sin(x) \leqslant x$ puis $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad |\sin(x)| \leqslant |x|$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \ln(x) \leqslant x - 1$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad x + 1 \leqslant \mathrm{e}^x$
4. $\forall\, x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[,\quad |x| \leqslant |\tan(x)|$
5. $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \left|\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right| \leqslant |x|$
6. $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad |x - \sin(x)| \leqslant \dfrac{|x|^3}{6}$
7. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\quad x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Correction : Cet exercice consiste simplement à étudier une fonction auxiliaire dérivable φ via le signe de sa dérivée et à montrer qu'elle ne prend que des valeurs positives sur un intervalle bien choisi.

Il est bon de retenir ces inégalités qui reviennent souvent et d'en connaître leur interprétation graphique.

1. $\varphi : x \longmapsto x - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Puis, $\forall\, x \in \mathbb{R}_-$, $-x \in \mathbb{R}_+$ et par imparité on a $\sin(-x) \leqslant -x \implies \sin(x) \geqslant x$ puis $|\sin(x)| \leqslant |x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2. $\varphi : x \longmapsto x - 1 - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. $\varphi : x \longmapsto \mathrm{e}^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$.
4. $\varphi : x \longmapsto \tan(x) - x$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ puis conclure par imparité.
5. $\varphi : x \longmapsto x - \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}$ sur $\mathbb{R}_+$ puis conclure par imparité. On trouvera $\varphi'(x) = \left(\dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}\right)^2 \geqslant 0$.
6. $\varphi : x \longmapsto \dfrac{x^3}{6} - x + \sin(x)$ et $\psi : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2} - 1 + \cos(x)$ sur $\mathbb{R}_+$ puis user de l'imparité des fonctions sur $\mathbb{R}$.
7. $\varphi : x \longmapsto \ln(1+x) + \dfrac{x^2}{2} - x$ sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème d'encadrement donnera la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Exercice 9 : Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y.

Démontrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Correction : Explicitons la formule pour $\max(x, y)$.

Si $x \geqslant y$, alors $|x-y| = x-y$ donc $\dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \dfrac{1}{2}(x+y+x-y) = x$.

De même si $x \leqslant y$, alors $|x-y| = -x+y$ donc $\dfrac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \dfrac{1}{2}(x+y-x+y) = y$.

Pour trois éléments, nous avons $\max(x,y,z) = \max\big(\max(x,y), z\big)$, donc d'après les formules pour deux éléments :

$$\begin{aligned}\max(x,y,z) &= \frac{\max(x,y) + z + |\max(x,y) - z|}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) + z + \left|\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) - z\right|}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 10 : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose :

Moyenne arithmétique : $m = \dfrac{x+y}{2}$.

Moyenne harmonique : $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$.

Moyenne géométrique : $g = \sqrt{xy}$.

Moyenne quadratique : $q = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$.

Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant q \leqslant y$.

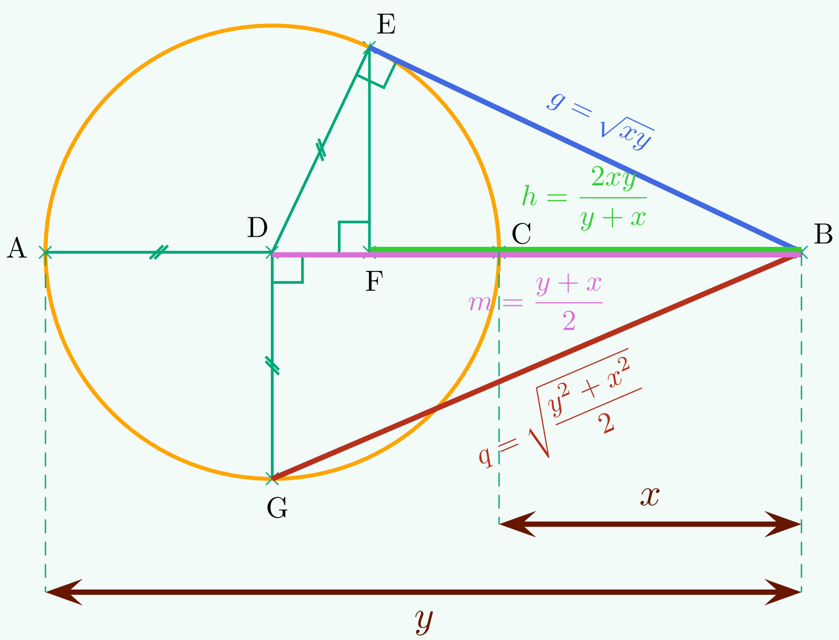
Correction : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$.

1. $q = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} \leqslant \sqrt{\dfrac{2y^2}{2}} = y$.
2. $\dfrac{x^2+y^2}{2} = \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y-x}{2}\right)^2$ donc $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geqslant \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \implies m \leqslant q$.
3. $m - g = \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geqslant 0 \implies g \leqslant m$.
4. D'après 3, la moyenne géométrique des deux réels $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est inférieure à leur moyenne arithmétique :
$$\sqrt{\frac{1}{x}\frac{1}{y}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \iff \frac{1}{g} \leqslant \frac{1}{h} \iff h \leqslant g.$$
5. D'après 1 à 3, par transitivité de la relation $\leqslant$, la moyenne arithmétique des deux réels $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est inférieure au plus grand d'entre eux :
$$\frac{1}{h} \leqslant \frac{1}{x} \iff x \leqslant h.$$

Finalement, on a bien prouvé que :
$$0 < x \leqslant y \implies x \leqslant \frac{2xy}{x+y} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leqslant y.$$

Une démonstration géométrique est cependant bien plus jolie :

En supposant $x \leqslant y$, on construit la figure ci-dessous où $\mathrm{AB} = y$ et $\mathrm{BC} = x$ et D, le milieu de $[\mathrm{AC}]$.



Moyenne arithmétique : Par construction, $\mathrm{DB} = \mathrm{DC} + \mathrm{CB} = \dfrac{y-x}{2} + x = \dfrac{y+x}{2} = m$.

Moyenne géométrique : Sachant que $\mathrm{DA} = \mathrm{AD} = \dfrac{y-x}{2}$ et $\mathrm{DB} = \dfrac{y+x}{2}$, le théorème de Pythagore dans le triangle BDE donne :

$$\mathrm{EB}^2 = \mathrm{DB}^2 - \mathrm{DE}^2 = \left(\frac{y+x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = xy \implies \mathrm{EB} = g.$$

Moyenne harmonique : Les triangles DEF et DBE sont semblables donc le théorème de Thalès s'écrit :

$$\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} \implies \mathrm{BF} = \frac{\mathrm{BE}^2}{\mathrm{BD}} = \frac{xy}{\frac{y+x}{2}} = \frac{2xy}{y+x} = h.$$

Moyenne quadratique : Sachant que $\mathrm{DG} = \mathrm{AD} = \dfrac{y-x}{2}$, dans le triangle BDG, le théorème de Pythagore se traduit par :

$$\mathrm{BG}^2 = \mathrm{DG}^2 + \mathrm{BD}^2 = \left(\frac{y+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = \frac{y^2+x^2}{2} \implies \mathrm{BG} = q.$$

Il est trivial de prouver avec l'inégalité triangulaire que $\mathrm{BC} \leqslant \mathrm{BF} \leqslant \mathrm{BE} \leqslant \mathrm{BD} \leqslant \mathrm{BG} \leqslant \mathrm{AB}$ *i.e.* :

$$x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant q \leqslant y.$$

Exercice 11 (Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski) : Soient $a_1,\dots,\ a_n,\ b_1,\dots,\ b_n$ des nombres réels.

1. En considérant la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + xb_k)^2$, montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \qquad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

2. En déduire :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \qquad \text{(inégalité de Minkowski)}$$

Correction :

1. Si les b_k sont tous nuls, l'inégalité est claire.

   Sinon, pour x réel, posons

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k + xb_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)x + \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

   P est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est donc négatif ou nul ce qui fournit :

Nombres réels

$$0 \geqslant \Delta' = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right),$$

ou encore $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$, qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2\end{aligned}$$

et donc, $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$, qui est l'inégalité de Minkowski.

Commentaires : *L'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que le produit scalaire de deux vecteurs est inférieur ou égal au produit de leurs normes et l'inégalité de Minkowski est l'inégalité triangulaire.*

Exercice 12 (Quelques majorations utiles dans les concours) :

1. Majorer par une constante $|1-\cos(\theta)|$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Trouver $\varphi(\theta)$ dépendant de θ mais indépendant de x tel que :
$$\forall\, x \in]-1\,;1[,\ \forall\, \theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(\theta)}} \leqslant \varphi(\theta).$$
3. Soient α et $\beta \in [0\,;1[$ tels que $\alpha+\beta=1$.

   Montrer que $\forall\, x, y \geqslant 0,\ x^\alpha y^\beta \leqslant \alpha x + \beta y$.
4. Soit $a \in [0\,;1[$. Déterminer un majorant indépendant de t de $\left|\frac{t^n}{1+t^n}\right|$ pour $t \in [-a\,;a]$.
5. Montrer que $\forall\, t \in [0\,;1[,\ 0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant -\ln(1-t)$.

   En déduire $\forall\, \theta \in [0\,;\pi],\ \forall\, t \in]0\,;1[,\ \left|\ln\left(t^2-2t\cos(\theta)+1\right)\right| \leqslant 2\left|\ln(1-t)\right|$.

Correction :

1. $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ |1-\cos(\theta)| = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \leqslant 2$.
2. Comme $x \in]-1\,;1[$ et $\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\left|x^2\sin^2(\theta)\right| < \left|x^2\right| < 1$ donc la racine et le quotient sont correctement définis.

   Il suffit de minorer l'expression $1-x^2\sin^2(\theta)$ sur $[0\,;1]$ par parité.

   En reconnaissant un fonction polynomiale du second degré décroissante sur $\mathbb{R}_+$, son minimum est atteint pour $x=1$ et on a :
$$\forall\, x \in [0\,;1],\ 1-x^2\sin^2(\theta) \geqslant 1-\sin^2(\theta) = \cos^2(\theta).$$

Comme $\theta \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\theta) > 0$, d'où

$$\forall\, x \in \left]-1\,;1\right[,\ \forall\, \theta \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2(\theta)}} \leqslant \dfrac{1}{\cos(\theta} = \varphi(\theta),$$

indépendant de $x \in \left]-1\,;1\right[$.

3. Soit $y \geqslant 0$, $\alpha, \beta \in [0\,;1[$, étudions la fonction $\varphi : t \longmapsto \alpha t + \beta y - t^\alpha y^\beta$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

   D'après les théorèmes sur les sommes de fonctions dérivables, φ l'est clairement sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi'(t) = \alpha - \alpha y^\beta t^{\alpha-1} = \alpha\left(1 - y^\beta t^{\alpha-1}\right).$$

   On en déduit son tableau de variation :

t	0		$y^{-\frac{\beta}{\alpha-1}}$		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
φ	$\dfrac{y^q}{q}$	$\searrow$	$\varphi\left(y^{-\frac{\beta}{\alpha-1}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

   La fonction φ atteint donc un minimum en $t = y^{-\frac{\beta}{\alpha-1}}$ valant :

$$\varphi\left(y^{-\frac{\beta}{\alpha-1}}\right) = \alpha\dfrac{1}{y^{\frac{\beta}{\alpha-1}}} + \beta y - \dfrac{y^\beta}{y^{\left(\frac{\beta}{\alpha-1}\right)\alpha}}$$

   Avec $\alpha + \beta = 1$,

$$= \alpha y + \beta y - y^{\beta+\alpha} = \alpha y + (1-\alpha)y - y = 0.$$

   Finalement, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \alpha t + \beta y - t^\alpha y^\beta$ *i.e.* $t^\alpha y^\beta \leqslant \alpha t + \beta y$ et pour $t = x \in \mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\forall\, x, y \geqslant 0,\ x^\alpha y^\beta \leqslant \alpha x + \beta y.$$

4. Pour $t \in [-a\,;a] \subset \left]-1\,;1\right[$, la fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{t^n}{1+t^n} = 1 - \dfrac{1}{1+t^n}$ est dérivable de dérivée $\varphi'(t) = \dfrac{nt^{n-1}}{(1+t^n)^2}$ du signe de t^{n-1}.

   On en déduit son tableau de variation suivant la parité de n :

   n pair donc $n-1$ impair

t	$-a$		0		a
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
φ	$\dfrac{a^n}{1+a^n}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{a^n}{1+a^n}$

   n impair donc $n-1$ pair

t	$-a$		a
$\varphi'(t)$		$+$	
φ	$-\dfrac{a^n}{1+a^n}$	$\nearrow$	$\dfrac{a^n}{1+a^n}$

Dans tous les cas, $\forall t \in [-a\,;a]\,,\ \left|\dfrac{t^n}{1+t^n}\right| \leqslant \dfrac{a^n}{1+a^n} \leqslant a^n$.

Commentaires : *Le dernier majorant, quoique plus large, est souvent suffisant.*

5. $\forall t \geqslant 0$, $1+t \geqslant 1$ et $0 \leqslant \ln(1+t)$ par croissance de $\ln$.

   De plus, $1-t>0$ et $\ln(1+t)+\ln(1-t) = \ln(\underbrace{1-t^2}_{<1}) \leqslant 0$ donc $\ln(1+t) \leqslant -\ln(1-t)$.

   Ainsi, $\forall t \in [0\,;1[$, $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant -\ln(1-t)$.

   De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 < (1-t)^2 \leqslant t^2-2t+1 \leqslant t^2-2t\cos(\theta)+1 \leqslant t^2+2t+1 = (t+1)^2$.

   Par croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$ et, en particulier, sur $[0\,;1[$,

$$\ln\left((1-t)^2\right) \leqslant \ln\left(t^2-2t\cos(\theta)+1\right) \leqslant \ln\left((1+t)^2\right)$$
$$\underbrace{2\ln(1-t)}_{<0} \leqslant \ln\left(t^2-2t\cos(\theta)+1\right) \leqslant 2\ln(1+t) \leqslant \underbrace{-2\ln(1-t)}_{>0}$$
$$\left|\ln\left(t^2-2t\cos(\theta)+1\right)\right| \leqslant 2\left|\ln(1-t)\right|.$$

II/ Borne supérieure

Exercice 13 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $[0\,;1] \cap \mathbb{Q}$
2. $]0\,;1[\cap \mathbb{Q}$
3. $\mathbb{N}$
4. $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n^2} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Correction :

1. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty\,;0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.
2. $]0,1[\cap\mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty\,;0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il n'existe pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
3. $\mathbb{N}$. Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $]-\infty\,;0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.
4. $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Les majorants : $\left[\dfrac{5}{4}\,;+\infty\right[$. Les minorants : $]-\infty\,;-1]$. La borne supérieure : $\dfrac{5}{4}$. La borne inférieure : -1. Le plus grand élément : $\dfrac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Exercice 14 : Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Correction : $(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc A ne possède pas de majorant, ainsi A n'a pas de borne supérieure (cependant certains écrivent alors $\sup \mathrm{A} = +\infty$).

D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf \mathrm{A} = 0$.

Exercice 15 : Soient A et B deux parties majorées non vides de $\mathbb{R}$.

1. On note $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \{a+b,\ (a\,;b) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}\}$.

   Montrer que $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ admet une borne supérieure, et que $\sup(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \sup(\mathrm{A}) + \sup(\mathrm{B})$.
2. On note $\mathrm{A}-\mathrm{B} = \{a-b,\ (a\,;b) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}\}$.

   Montrer que $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ admet une borne supérieure, et que $\sup(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \sup(\mathrm{A}) + \inf(\mathrm{B})$.
3. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

   Montrer que $\sup\left\{|x-y|,\ (x,y)\in\mathrm{A}^2\right\} = \sup(\mathrm{A}) - \inf(\mathrm{A})$.

Correction :

1. Comme A et B sont non vides, $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ est non vide. Pour tout $x \in \mathrm{A}+\mathrm{B}$, il existe $(a\,;b) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}$ tels que $x = a+b$.

   Or, $a \leqslant \sup(\mathrm{A})$ et $b \leqslant \sup(\mathrm{B})$ donc $x \leqslant \sup(\mathrm{A}) + \sup(\mathrm{B})$.

   Ainsi $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ est majorée par $\sup(\mathrm{A})+\sup(\mathrm{B})$, donc admet une borne supérieure.

   En particulier, de la définition de la borne supérieure de $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, on a :
   $$\sup(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqslant \sup(\mathrm{A}) + \sup(\mathrm{B}). \tag{XI.4}$$

   Montrons que $\sup(\mathrm{A})+\sup(\mathrm{B})$ est le plus petit des majorants de $\mathrm{A}+\mathrm{B}$.

   Soit M un majorant de $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, on a donc pour tout $a\in\mathrm{A}$ et $b\in\mathrm{B}$, $a+b\leqslant\mathrm{M}$.

   Ainsi $a \leqslant \mathrm{M}-b$, et ceci pour tout $a\in\mathrm{A}$.

   $\mathrm{M}-b$ est donc un majorant de A d'où $\sup(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{M}-b$ par définition de $\sup(\mathrm{A})$.

   D'où, $b \leqslant \mathrm{M}-\sup(\mathrm{A})$ et ce, pour tout $b\in\mathrm{B}$.

   Par définition de la borne supérieure de B cette fois, on a encore $\sup(\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{M}-\sup(\mathrm{A})$.

   Finalement $\sup(\mathrm{A})+\sup(\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{M}$ *i.e.* $\sup(\mathrm{A})+\sup(\mathrm{B})$ est le plus petit des majorants de $\mathrm{A}+\mathrm{B}$.

   Donc, $\sup(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \sup(\mathrm{A})+\sup(\mathrm{B})$.

   Remarque : Une autre méthode est de montrer directement l'inégalité contraire de (XI.4).

   Soient $a\in\mathrm{A}$ et $b\in\mathrm{B}$. Alors $a+b\leqslant\sup(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \iff a \leqslant \sup(\mathrm{A}+\mathrm{B})-b$ qui est donc un majorant de A.

   Par définition de la borne supérieure, $\sup(\mathrm{A}) \leqslant \sup(\mathrm{A}+\mathrm{B})-b$.

   Mais alors $b \leqslant \sup(\mathrm{A}+\mathrm{B})-\sup(\mathrm{A})$ puis $\sup(\mathrm{B}) \leqslant \sup(\mathrm{A}+\mathrm{B})-\sup(\mathrm{A})$.

Nombres réels

Donc $\sup(A) + \sup(B) \leqslant \sup(A + B)$ et l'égalité.

2. Même raisonnement.
3. Posons $B = \{|y - x|,\ (x, y) \in A^2\}$.

A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, et donc $m = \inf(A)$ et $M = \sup(A)$ existent dans $\mathbb{R}$.

Pour $(x\,; y) \in A^2$, on a $m \leqslant x \leqslant M$ et $m \leqslant yM$, et donc $y - x \leqslant M - m$ et $x - y \leqslant M - m$ ou encore $|y - x| \leqslant M - m$.

Par suite, B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. B admet donc une borne supérieure.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(x_0\,; y_0) \in A^2$ tel que $x_0 < \inf(A) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $y_0 > \sup(A) - \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Ces deux éléments x_0 et y_0 vérifient,

$$|y_0 - x_0| \geqslant y_0 - x_0 > \left(\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon.$$

En résumé,

(a) $\forall (x, y) \in A^2,\ |y - x| \leqslant \sup(A) - \inf A$ et
(b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (x, y) \in A^2 /\ |y - x| > \sup(A) - \inf A - \varepsilon$.

Donc, $\sup B = \sup(A) - \inf A$ *i.e.*

$$\sup\{|y - x|,\ (x, y) \in A^2\} = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 16 (Autour de la borne sup d'un ensemble) :

Soit A un ensemble borné de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sup\{\lambda + a, a \in A\} = \lambda + \sup(A)$.
2. Montrer que pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\sup\{\lambda a, a \in A\} = \lambda \sup(A)$.
3. À quoi est égal $\sup\{\lambda a, a \in A\}$ si $\lambda < 0$?

Correction :

1. Soit $x \in \{\lambda + a, a \in A\}$, alors $x = \lambda + a$ avec $a \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$x \leqslant \lambda + \sup(A).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \{\lambda + a, a \in A\}$, on a :

$$\sup\{\lambda + a, a \in A\} \leqslant \lambda + \sup(A).$$

Soit maintenant $a \in A$, alors $a + \lambda \in \{\lambda + a, a \in A\}$ donc :

$$a + \lambda \leqslant \sup\{\lambda + a, a \in A\}.$$

soit encore :

$$a \leqslant \sup\{\lambda + a, a \in A\} - \lambda.$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, on a :

$$\sup(A) \leqslant \sup\{\lambda + a, a \in A\} - \lambda,$$

d'où $\sup(\mathrm{A}) + \lambda \leqslant \sup\{\lambda + a, a \in \mathrm{A}\}$.

Par double inégalité, on a montré l'égalité.

2. On suppose $\lambda \geqslant 0$.

   Si $\lambda = 0$, le résultat est vrai, on suppose donc $\lambda > 0$.

   On procède, à nouveau, par double inégalité.

   Soit $x \in \{\lambda a, a \in \mathrm{A}\}$, alors $x = \lambda a$ avec $a \in \mathbb{R}$. On a $a \leqslant \sup(\mathrm{A})$ et $\lambda > 0$ donc :

$$x \leqslant \lambda \sup(\mathrm{A}).$$

   Soit maintenant $a \in \mathrm{A}$, alors $\lambda a \in \{\lambda a, a \in \mathrm{A}\}$ donc :

$$\lambda a \leqslant \sup\{\lambda a, a \in \mathrm{A}\}.$$

   Comme $\lambda > 0$, on peut diviser l'inégalité par λ et on obtient :

$$a \leqslant \frac{1}{\lambda} \sup\{\lambda a, a \in \mathrm{A}\}.$$

   Ceci étant valable pour tout $a \in \mathrm{A}$, on a $\sup(\mathrm{A}) \leqslant \dfrac{1}{\lambda} \sup\{\lambda a, a \in \mathrm{A}\}$.

   Par double inégalité, on a montré l'égalité.

3. Si $\lambda < 0$, on a $\sup\{\lambda a, a \in \mathrm{A}\} = \lambda \inf(\mathrm{A})$.

   En effet, si $x \in \{\lambda a, a \in \mathrm{A}\}$, on a $x = \lambda a$ avec $a \in \mathrm{A}$ donc $a \geqslant \inf(\mathrm{A})$.

   Comme $\lambda < 0$, multiplier par λ l'inégalité donne :

$$x \leqslant \lambda \inf(\mathrm{A}).$$

   De même, si $a \in \mathrm{A}$, alors $\lambda a \in \{\lambda a, a \in \mathrm{A}\}$ donc $\lambda a \leqslant \sup\{\lambda a, a \in \mathrm{A}\}$.

   On divise par λ ce qui inverse l'inégalité et on obtient $\dfrac{1}{\lambda} \sup\{\lambda a, a \in \mathrm{A}\} \leqslant a$.

   Ceci étant valable pour tout $a \in \mathrm{A}$, on a :

$$\frac{1}{\lambda} \sup\{\lambda a, a \in \mathrm{A}\} \leqslant \inf(\mathrm{A}).$$

   Par double inégalité, on a donc montré l'égalité suivante :

$$\sup\{\lambda a, a \in \mathrm{A}\} = \lambda \inf(\mathrm{A}).$$

Exercice 17 : Soit $f : [0\,;1] \longmapsto [0\,;1]$ une application croissante.

On pose $\mathrm{A} = \{x \in [0\,;1]\,, f(x) \geqslant x\}$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure m.
2. Montrer que m est un point fixe de f *i.e.* $f(m) = m$.

Correction :

1. A est une partie non-vide (car elle contient 0), et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$.

   Elle admet donc une borne supérieure m.
2. On va raisonner par l'absurde pour démontrer que $f(m) = m$.
   (a) Si $f(m) < m$, comme m est le plus petit des majorants de A, $f(m)$ ne majore pas A.

   Il existe donc un élément c de A tel que $f(m) < c \leqslant m$.

   Mais alors $f(c) \geqslant c > f(m)$ alors que $c \leqslant b$. Ceci contredit que f est croissante.

   (b) Si $f(m) > m$, comme f est croissante, on a $f(f(m)) \geqslant f(m)$, et donc $f(m) \in \mathrm{I}$, ce qui est impossible puisque $f(m)$ est strictement supérieur à la borne supérieure de A.

III/ Partie entière

Exercice 18 : Soient $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor 2x \rfloor \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\lfloor x \rfloor \end{array}$.

A-t-on $f \equiv g$?

Exercice 19 : Représenter la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

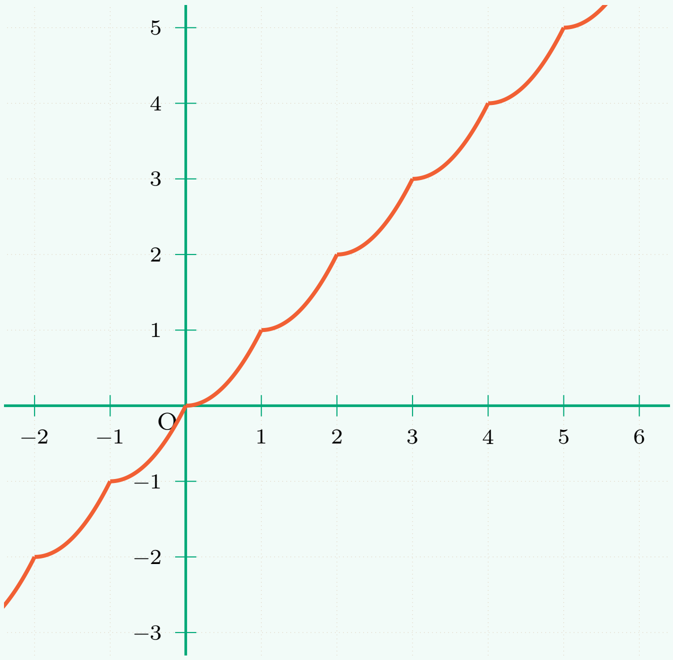
Correction : Simplifions le domaine d'étude.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = \lfloor x+1 \rfloor + (x+1-\lfloor x+1 \rfloor)^2 = 1 + \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 = 1 + f(x)$.

On étudiera donc la fonction f sur $[0\,;1[$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la courbe complète sur $[k\,;k+1[$ sera obtenue à partir de celle sur $[0\,;1[$ par une translation de vecteur $k\vec{j}$.

De plus, $\forall\, x \in [0\,;1[$, $f(x) = x^2$ et $f(1) = \lfloor 1 \rfloor + (1 - \lfloor 1 \rfloor)^2 = 1$.

D'où, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2 = 1 = f(1)$ et la fonction est continue sur $[0\,;1]$. Par translation, elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier.



$$x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 .$$

Exercice 20 : Soit n un entier naturel.

1. Montrer que le nombre de chiffres $\kappa(n)$ de n dans son écriture décimale est :

$$\kappa(n) = \lfloor \log n \rfloor + 1$$

2. Quel est le nombre de chiffres de n dans son écriture en base b ?

Correction :

1. Un nombre $n \geqslant 1$ est nécessairement compris entre deux puissances de 10 *i.e.*

$$\exists\, p \in \mathbb{N}^*, \ / \ 10^p \leqslant n < 10^{p+1} \qquad \textit{i.e. } n \text{ possède } p+1 \text{ chiffres.}$$

Or, comme la fonction $\log$ est une fonction croissante, on a aussi :

$$\begin{array}{rcl} \log 10^p & \leqslant \log n < & \log 10^{p+1} \\ p & \leqslant \log n < & p+1. \end{array}$$

On a donc : $\lfloor \log \mathrm{N} \rfloor = p$ où E est la fonction partie entière.

Conclusion : le nombre de chiffres de n est donc : $\lfloor \log \mathrm{N} \rfloor + 1$.

Par exemple, comme $\log\left(2021^{2022}\right) \simeq 6683,9$. Le nombre 2021^{2022} s'écrit avec 6 684 chiffres !

2. Raisonnement identique avec $\log_b$.

Nombres réels

Exercice 21 : Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (x \in \mathbb{Z}) \iff (\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor)$.

Correction :

$\Rightarrow$: Supposons que $x \in \mathbb{Z}$. Alors $\lfloor x \rfloor = x$.

On a aussi $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad nx \in \mathbb{Z}$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx \rfloor = nx = n \lfloor x \rfloor$.

$\Leftarrow$: Montrons la contraposée : si $x \notin \mathbb{Z}$ alors $\exists n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx \rfloor \neq n \lfloor x \rfloor$.

Notons $x = \lfloor x \rfloor + \epsilon$ avec $\epsilon \in]0,1[$.

$\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\epsilon > 1$.

On a donc $\lfloor n_0 x \rfloor = \lfloor n_0 \lfloor x \rfloor + n_0\epsilon \rfloor = n_0 \lfloor x \rfloor + \lfloor n_0\epsilon \rfloor \geqslant n_0 \lfloor x \rfloor + 1$. Donc $\lfloor n_0 x \rfloor \neq n_0 \lfloor x \rfloor$. CQFD

Exercice 22 : Montrer que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Correction : Poser $\begin{cases} x = \lfloor x \rfloor + x' \\ y = \lfloor y \rfloor + y' \end{cases}$ avec $x', y' \in [0,1[$.

$$\begin{aligned}\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor &\iff \lfloor x \rfloor + \lfloor \lfloor x \rfloor + x' + \lfloor y \rfloor + y' \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2\lfloor x \rfloor + 2x' \rfloor + \lfloor 2\lfloor y \rfloor + 2y' \rfloor \\ &\iff 2\lfloor x \rfloor + \lfloor x' + y' \rfloor + 2\lfloor y \rfloor \leqslant 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x' \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor \\ &\iff \lfloor x' + y' \rfloor \leqslant \lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor\end{aligned}$$

Le membre de gauche $\lfloor x' + y' \rfloor$ vaut 0 ou 1. Le membre de droite $\lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor$ vaut 0 , 1 ou 2.

La dernière inégalité ne serait pas vérifiée uniquement si $\begin{cases} \lfloor x' + y' \rfloor = 1 \\ \lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor = 0 \end{cases}$.

Or $\lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor = 0$ implique $0 \leqslant x' < \dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant y' < \dfrac{1}{2}$.

Et alors, $0 \leqslant x' + y' < 1$ et c'est absurde puisque $\lfloor x' + y' \rfloor = 1$.

Exercice 23 : Résoudre l'équation

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x+2 \rfloor$$

Correction :

Analyse : Soit x une solution. Alors en posant $n = \lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x+2 \rfloor$, on a $\begin{cases} n \leqslant 2x+3 < n+1 \\ n \leqslant x+2 < n+1 \end{cases}$.

D'où $2x+3 < n+1 \leqslant x+3$, i.e. $x < 0$.

Et $x+2<n+1\leqslant 2x+4$ donc $-2<x$. On en déduit que $\mathcal{S}\subset]-2,0[$.

Synthèse :
— Si $x\in]-2,-1[$, on a $x+2\in]0,1[$ donc $\lfloor x+2\rfloor=0$.

$$\lfloor 2x+3\rfloor=\lfloor x+2\rfloor \iff \lfloor 2x+3\rfloor=0 \iff 0\leqslant 2x+3<1 \iff -\frac{3}{2}\leqslant x<-1.$$

— Si $x\in]-1,0[$, on a $x+2\in]1,2[$ donc $\lfloor x+2\rfloor=1$.

$$\lfloor 2x+3\rfloor=\lfloor x+2\rfloor \iff \lfloor 2x+3\rfloor=1 \iff 1\leqslant 2x+3<2 \iff -1\leqslant x<-\frac{1}{2}.$$

$$\mathcal{S}=\left[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right[.$$

Exercice 24 :

1. Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}<2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la partie entière de $\mathrm{A}=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{10000}}$.

Correction :

1. Tout repose sur la partie conjuguée. Soit $n\in\mathbb{N}^*$:

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \implies \frac{2}{2\sqrt{n+1}}<2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{2}{2\sqrt{n}}.$$

D'où, le résultat.

2. On encadre $\mathrm{A}=\displaystyle\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}}$ à l'aide de la première question et on reconnaît une somme télescopique :

$$2\sum_{k=1}^{10000}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)<\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum_{k=0}^{9999}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sum_{k=0}^{9999}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$$
$$2\left(\sqrt{10001}-1\right)<\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{10000}$$
$$2\left(\sqrt{10001}-1\right)<\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}}<200$$

Pour la partie entière, il reste à prouver que $2\left(\sqrt{10001}-1\right)>198 \iff \sqrt{10001}-1>99 \iff \sqrt{10001}>100$ ce qui est relativement évident sachant que $10001=10000+1$.

Conclusion, $\left\lfloor\displaystyle\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}}\right\rfloor=199.$

Exercice 25 : Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\left\lfloor\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2\right\rfloor=4n+1$.

Correction : Les termes en racines sont égaux à j lorsque k est entre j^2 et $(j+1)^2-1$.

Exercice 26 : Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Correction : L'idée est de former des paquets de termes consécutifs identiques.

En effet, lorsque l'entier k parcourt l'ensemble $\left[\!\left[j^2 \,; (j+1)^2 - 1 \right]\!\right]$, l'expression $\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$ prend constamment la valeur j.

Il est donc naturel de regrouper les termes correspondants pour obtenir :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=j^2}^{(j+1)^2-1} j \right).$$

Mais la somme interne comporte $(j+1)^2 - 1 - j^2 + 1 = 2j+1$ termes, tous égaux à j, et donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n &= \sum_{j=1}^{n-1} j\,(2j+1) = 2\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j \\
&= \frac{(n-1)n(2n-1)}{3} + \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{n(n-1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 27 : Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{b} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor = a.$$

Correction : $a = bq + r \implies \sum = \underbrace{q + q + \cdots + q}_{b-r} + \underbrace{(q+1) + \cdots + (q+1)}_{r} = bq + r = a.$