

XIII

Les nombres réels

CONTENU

I	Nombres entiers, décimaux, rationnels	2
I.1	Rappels sur les rationnels	2
I.2	L'ensemble des rationnels est insuffisant	2
I.3	L'ensemble des réels	3
II	Relation d'ordre sur \mathbb{R}	3
II.1	Être inférieur à	3
II.2	Borne supérieure, borne inférieure	4
II.3	Fonctions bornées	7
III	Topologie de \mathbb{R}	8
III.1	La droite numérique achevée	8
III.2	Intervalles de \mathbb{R}	9
III.3	Voisinages	10
IV	Opérateurs réels	12
IV.1	Valeur absolue	12
IV.2	Partie entière	16
V	Notion de densité	18
V.1	Place des rationnels et des irrationnels dans \mathbb{R}	18
V.2	Approximations décimales	19

I/ Nombres entiers, décimaux, rationnels

I.1 Rappels sur les rationnels

- Tout rationnel peut s'écrire de différentes manières sous forme de fractions, par exemple $\frac{p}{q} = \frac{2p}{2q} = \dots$, mais tout nombre rationnel s'écrit de manière unique sous forme de *fraction irréductible* i.e. sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux.

L'égalité des produits en croix, caractérise ces classes d'équivalence :

$$\forall \left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d} \right) \in \mathbb{Q}^2, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \quad \text{avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0.$$

- L'ensemble \mathbb{Q} est muni de deux lois de composition interne :

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

Exercice 1 : Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible :

$$A = \frac{a^3 - b^3}{(a - b)^2} - \frac{(a + b)^2}{a - b} \quad \text{pour } (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \text{ distincts deux à deux.}$$

$$B = \frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

I.2 L'ensemble des rationnels est insuffisant

En termes d'approximations numériques, \mathbb{Q} peut paraître suffisant en sciences appliquées. Le problème se pose lorsqu'on a besoin de connaître la valeur exacte de certaines grandeurs.

Par exemple, peut-on mesurer dans \mathbb{Q} la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1? D'après le théorème de Pythagore, cela revient à se demander s'il existe un rationnel dont le carré est égal à 2, or nous avons déjà établi que la réponse est négative : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Cette lacune de \mathbb{Q} avait été remarquée par les Pythagoriciens, ce qui a conduit les mathématiciens à introduire de nouveaux nombres, les *irrationnels*, en concevant un ensemble plus vaste que \mathbb{Q} , l'ensemble des *nombres réels* noté \mathbb{R} .

I.3 L'ensemble des réels

Définition 1 : L'ensemble des abscisses des points d'une droite orienté est l'ensemble des *nombre réels*.



L'ensemble des nombres réels est noté \mathbb{R} .

Les abscisses des points de la demie-droite $[OI)$ appartiennent à \mathbb{R}_+ .

II/ Relation d'ordre sur \mathbb{R}

II.1 Être inférieur à

Définition 2 : Soit $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$.

On dit que « *x est inférieur à y* » et on note $x \leq y$ si, et seulement si $y - x \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 1 :

$(\mathbb{R}; \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.

En particulier, tous les éléments de \mathbb{R} sont comparables :

$$\forall (x ; y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x.$$

Remarques :

- La relation \geq est aussi une relation d'ordre total sur \mathbb{R} .
- La relation $<$ est définie par $x < y \iff y - x \in \mathbb{R}_+^* \iff x \leq y$ et $x \neq y$.

ATTENTION

La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est ni réflexive, ni anti-symétrique.

Proposition 2 (Compatibilité de \leq avec $+$ et \times) :

Soient a, b, c et d des nombres réels.

1. Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
2. Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
3. $a \leq b \iff -b \leq -a$.
4. Si a et b sont non nuls de même signe alors $a \leq b \iff \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

En particulier,

- $a \leq b \iff \forall \lambda \in \mathbb{R}, a + \lambda \leq b + \lambda.$
- $\forall \lambda > 0, a \leq b \iff \lambda a \leq \lambda b$ et $\forall \lambda < 0, a \leq b \iff \lambda a \geq \lambda b.$

ATTENTION

L'assertion 4 ne dit pas que la fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}^* mais seulement qu'elle est décroissante sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* .

On ne soustrait ni de divise des inégalités!

ATTENTION

$$\begin{cases} 1 \leq 3 \\ 2 \leq 5 \end{cases} \quad \text{mais} \quad 1 - 2 > 3 - 5.$$

On pourra cependant les ajouter membre à membre ou les multiplier si tous les membres sont strictement positifs.

Exercice 2 : Soient a, b des réels strictement positifs.

1. Ordonner les réels $\frac{a+b}{2}$ et \sqrt{ab} .
2. Montrer que leur distance est majorée par $\frac{|b-a|^3}{8ab}$.

II.2 Borne supérieure, borne inférieure

Rappel 1 (Parties bornées) : Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et A une partie de E .

On dit que :

- A est *majorée* dans E lorsque : $\exists M \in E, \forall x \in A, x \leq M.$
- A est *minorée* dans E lorsque : $\exists m \in E, \forall x \in A, m \leq x.$
- A est *bornée* dans E lorsque A est à la fois majorée et minorée.
- A admet un *maximum* lorsque : $\exists b \in A, \forall x \in A, x \leq b.$
- A admet un *minimum* lorsque : $\exists a \in A, \forall x \in A, a \leq x.$

Exemple 1 : L'intervalle $[0; 1[$ admet 0 pour plus petit élément mais n'admet PAS de plus grand élément.

1. $0 \in [0; 1[$ et $\forall x \in [0; 1[, 0 \leq x$ donc 0 est le plus petit élément de $[0; 1[$.
2. Supposons qu'il existe $M \in [0; 1[$ qui en soit le plus grand élément. Alors $M' = \frac{M+1}{2}$ vérifie, $M < M'$ et $M' \in [0; 1[$ ce qui contredit la « maximalité » de M .



Il n'existe donc pas de plus grand élément dans $[0; 1[$.

Définition 3 (Borne supérieure) : +
 — Soit A une partie majorée de \mathbb{R} .
 On appelle *borne supérieure* de A , notée $\sup(A)$, le plus petit des majorants de A .
 — Soit B une partie minorée de \mathbb{R} .
 On appelle *borne inférieure* de B , notée $\inf(B)$, le plus grand des minorants de B .

ATTENTION

Les bornes inférieure et supérieure n'ont aucune raison d'exister.

Théorème 3 (Propriété de la borne supérieure) :
 Toute partie non vide et majorée de \mathbb{R} possède une borne supérieure.

Ce théorème est faux dans \mathbb{Q} .

Par exemple $A = \{q \in \mathbb{Q}^+, q^2 \leq 2\}$ est non vide (elle contient 0) et majorée (par 10).

Si A admettait une borne supérieure $\alpha \in \mathbb{Q}$:

ATTENTION

- Si $\alpha^2 < 2$, alors, on peut trouver un entier n tel que $\alpha + \frac{1}{n} \in A$; absurde.
- Si $\alpha^2 > 2$, alors, on peut trouver un entier n tel que $\alpha - \frac{1}{n}$ majore A ; absurde.
- Si $\alpha^2 = 2$, alors $\alpha \notin \mathbb{Q}$; absurde.

Conclusion, A ne possède pas de borne supérieure.

On prendra garde au fait qu'une partie A peut posséder une borne supérieure a sans avoir de plus grand élément.

Réciproquement, si A possède un plus grand élément a , alors $a = \max(A) = \sup(A)$.

Exercice 3 : Compléter :

	$\min(A)$	$\inf(A)$	$\max(A)$	$\sup(A)$
$A = \{2, 4\}$				
$A =]1; 5]$				
$A = \{x \in \mathbb{Q}_+ / x^2 \leq 2\}$				
$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$				
$A = \left\{ \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R} \right\}$				

Théorème 4 (Caractérisation de la borne supérieure) :

Soit A une partie majorée non vide de \mathbb{R} et $M \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M = \sup A &\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall M' \text{ majorant de } A, M \leq M' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall b < M, b \text{ n'est pas un majorant de } A \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq M \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x_\varepsilon \in A \text{ tel que } M - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 4 : Sur le même modèle, écrire une caractérisation de la borne inférieure.

Corollaire 4.1 (Borne inférieure d'une partie non vide et minorée de \mathbb{R}) :

Toute partie non vide minorée de \mathbb{R} possède une borne inférieure.

Méthode 1 (Utilisation courante de la borne supérieure) :

Soient A une partie de \mathbb{R} admettant une borne supérieure.

1. Pour montrer que $\sup(A) \leq M$, il suffit de montrer : $\forall a \in A, a \leq M$
2. Pour montrer que $\sup(A) \geq M$, il suffit de montrer : $\exists a_0 \in A, a_0 \geq M$;

Exemple 2 : L'intervalle $[0; 1[$ admet 1 comme borne supérieure.

1. Par définition, $\forall x \in [0; 1[, x \leq 1$ donc $[0; 1[$ est une partie non vide est majorée. $\sup([0; 1[)$ existe d'après le **théorème (3)** et on a :

$$\sup([0; 1[) \leq 1.$$

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Montrons que $1 - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $[0; 1[$.

On sait déjà que $1 - \varepsilon \in [0; 1[$, de même que $\frac{(1 - \varepsilon) + 1}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$, le réel $1 - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $[0; 1[$.



La réunion des points 1 et 2, montre que 1 est un majorant de $[0; 1[$ et que c'est le plus petit. Le réel 1 est donc la borne supérieure de $[0; 1[$.

Exercice 5 : Soient A et B deux parties de \mathbb{R} non vides et bornées telles que $A \subset B$.

Montrer que $\inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$.

II.3 Fonctions bornées

Définition 4 (Fonction bornées) : Soient I un sous-ensemble de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

— Une fonction f est dite *majorée* sur I lorsqu'il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in I, f(x) \leq M.$$

Le réel M est alors appelé un *majorant* de f (sur I).

On appelle alors *borne supérieure* de f sur I , notée $\sup_I(f)$, le réel

$$\sup_I(f) = \sup \{f(x), x \in I\}.$$

— Une fonction f est dite *minorée* sur I lorsqu'il existe un réel m tel que :

$$\forall x \in I, f(x) \geq m.$$

Le réel m est alors appelé un *minorant* de f (sur I).

On appelle alors *borne inférieure* de f sur I , notée $\inf_I(f)$, le réel

$$\inf_I(f) = \inf \{f(x), x \in I\}.$$

— Une fonction f est dite *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Exercice 6 : Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f, g \in \mathcal{F}(I; \mathbb{R})$.

1. Démontrer que si f et g sont majorées alors $f + g$ est majorée et

$$\sup_I(f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g. \quad (\text{XII.1})$$

2. Donner un exemple où l'inégalité (XII.1) est stricte.

3. Démontrer que si f est majorée et g bornée alors $\sup_I(f + g) \geq \sup_I f + \inf_I g$.

III/ Topologie de \mathbb{R} _____

III.1 La droite numérique achevée _____

Définition 5 (Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$) :

L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, noté $\overline{\mathbb{R}}$, est appelé *droite numérique achevée*.

On étend à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation \leq , l'addition $+$ et la multiplication \times de \mathbb{R} de la façon suivante :

Prolongement de l'ordre : $\forall x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty$.

Prolongement de l'addition : $\forall x \in \mathbb{R}$,

- $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$.
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Prolongement de la multiplication :

- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$.
 - $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$,
- $$x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
- $$x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ devient ainsi un ensemble totalement ordonné. De plus il possède un maximum $+\infty$ et un minimum $-\infty$.

On prendra garde au fait que nous n'avons pas totalement défini de loi de composition interne dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque restent indéfinis les opérations :

- $0 \times (\pm\infty)$
- $(-\infty) + (+\infty)$
- $(-\infty) - (-\infty)$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Proposition 5 :

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ (éventuellement $\pm\infty$).

En outre, si les bornes supérieure et inférieure existent dans \mathbb{R} alors elles coïncident avec leur homologue dans $\overline{\mathbb{R}}$.

III.2 Intervalles de \mathbb{R}

Définition 6 : Soient $(a; b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$.

On définit les ensembles suivants :

- $[a; b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a \leq x \leq b\}$
- $]a; b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a < x \leq b\}$
- $[a; b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a \leq x < b\}$
- $]a; b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a < x < b\}$

On appelle *intervalle* de $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie I de $\overline{\mathbb{R}}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in I, x \leq y \implies [x; y] \subset I.$$

Exemples 3 :

— Lorsque $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle *segment* l'ensemble $[a; b] \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \text{Si } a < b, & [a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} \\ \text{Si } a = b, & [a; a] = \{a\} \\ \text{Si } a > b, & [a; b] = \emptyset \end{cases}$$

- \emptyset et $\{a\}$ sont dits *intervalles triviaux* de \mathbb{R} . Ce sont les seuls intervalles de \mathbb{R} qui soient finis.
- \mathbb{Z} n'est pas un intervalle de \mathbb{R} car $1, 2 \in \mathbb{Z}$ mais pas $\frac{3}{2} \in \mathbb{Z}$.
- \mathbb{R}^* n'est pas un intervalle car $-1, 1 \in \mathbb{R}^*$ mais pas $[-1; 1]$ qui contient $0 \notin \mathbb{R}^*$.
- \mathbb{Q} n'est pas un intervalle de \mathbb{R} (cf. corollaire (13.1)).

Théorème 6 (Caractérisation des intervalles de \mathbb{R}) :

Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont exactement les ensembles $[a; b]$, $[a; b[$, $]a; b]$ et $]a; b[$ pour a et b décrivant $\overline{\mathbb{R}}$.

Les intervalles $[a; b]$ et $]a; b[$ avec $(a; b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ sont respectivement dits *fermé* et *ouvert*.

Exemples 4 (Classification des intervalles de \mathbb{R}) : Les intervalles de \mathbb{R} sont :

- l'ensemble vide \emptyset ,
- l'ensemble \mathbb{R} tout entier,
- les singletons $\{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$ un réel,
- les segments $[a; b]$, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles ouverts $]a; b[$, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les intervalles semi-ouverts ou semi-fermés $[a; b[$ et $]a; b]$, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
- les demi-droites fermées $[a; +\infty[$ ou $]-\infty; a]$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par

$$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\} \quad \text{et} \quad]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\},$$

— les demi-droites ouvertes $]a; +\infty[$ ou $]-\infty; a[$, avec $a \in \mathbb{R}$, définies respectivement par

$$]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\} \quad \text{et} \quad]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\},$$

III.3 Voisinages

Définition 7 (Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$ dans \mathbb{R}) : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On appelle *voisinage* de a (dans \mathbb{R}), noté $\mathcal{V}(a)$, toute partie $V \subset \mathbb{R}$ qui contient :

— un intervalle ouvert contenant a si $a \in \mathbb{R}$:

$$V \in \mathcal{V}(a) \iff \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\subset V.$$

— un intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ si $a = +\infty$:

$$V \in \mathcal{V}(+\infty) \iff \exists A \in \mathbb{R},]A; +\infty[\subset V.$$

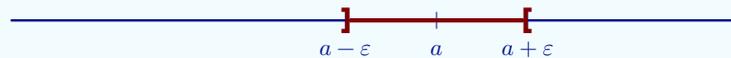
— un intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ si $a = -\infty$:

$$V \in \mathcal{V}(-\infty) \iff \exists A \in \mathbb{R},]-\infty; A[\subset V.$$

Exemples 5 (Exemples de voisinages) : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Les voisinages de a sont les intervalles de la forme :

— $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ est un voisinage de a .



— $\forall A \in \mathbb{R},]A; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.



— $\forall A \in \mathbb{R},]-\infty; A[$ est un voisinage de $-\infty$.



Exemples 6 :

— $[0; 1]$ est un voisinage de $0,2$: prendre $\varepsilon = 0,1$ par exemple.

— $[0; 1]$ est un voisinage de $0,98$: prendre $\varepsilon = 0,01$ par exemple.

- $]0; 1]$ n'est pas un voisinage de 1 : pour tout $\varepsilon > 0$, $]1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon[$ déborde à droite.
- $]0; 1[$ est voisinage de tous ses points : $\forall a \in]0; 1[$, il suffit de prendre $\varepsilon = \min \{a, 1 - a\}$ (la plus petite des distances de a aux bornes de $]0; 1[$).

Théorème 7 (Lemme de séparation) :

1. Pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a :

$$\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}(a), V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(a).$$

2. Deux points distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ possèdent des voisinages disjoints :

$$\forall (a; b) \in \overline{\mathbb{R}}^2, a \neq b \implies \exists V_a \in \mathcal{V}(a), \exists V_b \in \mathcal{V}(b) \text{ tels que } V_a \cap V_b = \emptyset.$$

Remarque : Une autre manière de voir l'assertion (2) est d'écrire : Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $a < b$ alors il existe un voisinage V_a de a et un voisinage V_b de b tels que :

$$\forall x \in V_a \text{ et } y \in V_b, x < y.$$

Ce théorème permettra, entre autre, de démontrer l'unicité de la limite d'une suite ou d'une fonction en un point de $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 8 (Ouvert) : Soit U une partie de \mathbb{R} .

On dit que U est un *ouvert* si, et seulement si U est un voisinage de chacun de ses points :

$$\forall a \in U, \left\{ \begin{array}{l} \exists V \in \mathcal{V}(a), V \subset U. \\ \text{ou} \\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\subset U. \end{array} \right.$$

Exemples 7 :

- \emptyset est ouvert, puisqu'il n'y a même pas de point a à tester, c'est donc tout bon.
- un ensemble de cardinal fini ne peut pas être ouvert (dès qu'il y a un point a dans U , il y a alors dans U un intervalle entier $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$)
- \mathbb{N} et \mathbb{Z} ne sont pas ouverts : leurs points sont isolés.
- Tout intervalle ouvert $]b; c[$ est ouvert !

$$\left(\text{pour } a \text{ vérifiant } b < a < c, \text{ on peut prendre } \varepsilon = \min \left\{ \frac{a-b}{2}, \frac{c-a}{2} \right\} \right).$$

- \mathbb{R} est ouvert.
- Une intersection de deux ouverts U et V est encore un ouvert.
- Une réunion d'ouverts est un ouvert. En particulier, toute réunion d'intervalles ouverts est ouverte.

Dernière petite remarque complètement hors-programme avant de quitter ce paragraphe. C'est précisément l'ensemble des ouverts de \mathbb{R} qui s'appelle une *topologie*. Celui-ci devient alors un *espace topologique*.

IV/ Opérateurs réels

IV.1 Valeur absolue

Définition 9 (Valeur absolue) : Soit $x \in \mathbb{R}$.

La *valeur absolue* de x est le nombre réel noté $|x|$ défini par :

$$|x| = \max(x; -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Remarque : Une partie A est bornée si, et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in A, |x| \leq M.$$

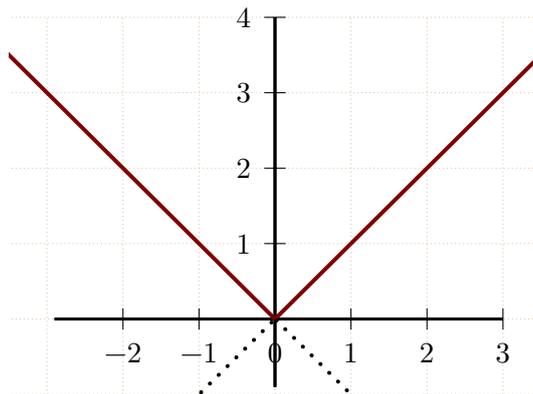


Figure XII.1 - $x \mapsto |x|$.

Méthode 2 (Équation avec la valeur absolue) :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1. $|x - a| = r \iff x - a = r \quad \text{ou} \quad x - a = -r.$
2. $|x - a| \leq r \iff -r \leq x - a \leq r \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - a \leq r \\ x - a \geq -r \end{cases}.$
3. $|x - a| \geq r \iff x - a \geq r \quad \text{ou} \quad x - a \leq -r.$

Exemple 8 : Écrire $|x - 3| - |x + 2|$ sans valeurs absolues.

On se ramène à la définition :

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad |x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Le mieux est de représenter la situation par un tableau :

x	-2	3
$ x - 3 $	$3 - x$	$x - 3$
$ x + 2 $	$-x - 2$	$x + 2$
$ x - 3 - x + 2 $	5	-5

$$|x - 3| - |x + 2| = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in]-\infty, -2[\\ 1 - 2x & \text{si } x \in [-2, 3[\\ -5 & \text{si } x \in [3, +\infty[\end{cases}$$

Exemple 9 : Résolution de l'équation $|x - 4| = 2x + 10$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$|x - 4| = 2x + 10 \iff \begin{cases} x - 4 = 2x + 10 & \text{si } x \geq 4 \\ \text{ou} \\ 4 - x = 2x + 10 & \text{si } x < 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -14 & \text{si } x \geq 4 \\ \text{ou} \\ x = -2 & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

Comme $-14 \notin [4, +\infty[$, il ne subsiste qu'une seule solution : $\mathcal{S} = \{-2\}$.

Exemple 10 : Résolution de l'inéquation $|x - 2| < \frac{3}{x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

On remarque que l'inéquation n'a pas de solution dans \mathbb{R}_-^* car $\frac{3}{x} < 0$ pour tout $x < 0$ alors que $|x - 2| \geq 0$. On restreint donc notre résolution à \mathbb{R}_+^* .

$$\begin{aligned} |x - 2| < \frac{3}{x} &\iff -\frac{3}{x} < x - 2 < \frac{3}{x} \iff_{x>0} -3 < x(x - 2) < 3 \\ &\iff \begin{cases} 0 < x^2 - 2x - 3 \\ \text{et} \\ (x + 1)(x - 3) < 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \text{ car } \Delta = -8 < 0 \\ \text{et} \\ x \in]-1; 3[\cap \mathbb{R}_+^* \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusion, $\mathcal{S} =]0; 3[$.

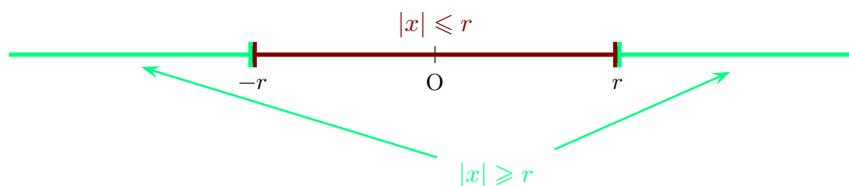


Figure XII.2 - $|x| \leq r$ et $|x| \geq r$.

Exercice 7 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1. $|4x - 5| = 3.$

2. $|4x - 5| \leq 3.$

3. $|2x - 7| > 1.$

Proposition 8 (Propriété de la valeur absolue) :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geq 0$

La valeur absolue est positive.

2. $|x| = 0 \iff x = 0$

La valeur absolue est définie.

3. $|-x| = |x|$

La valeur absolue est paire.

4. $-|x| \leq x \leq |x|.$

5. $\sqrt{x^2} = |x|$

La valeur absolue dérive d'un produit scalaire.

En particulier,

Corollaire 8.1 :

- De la définition, $|x| = |y| \iff x = y$ ou $x = -y$.
- De la parité, on n'oubliera pas que $|x - y| = |y - x|$.
- Du lien avec la racine carrée, on démontre aussi que

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x| |y| \quad \text{et} \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Enfin, et de loin la propriété la plus importante :

Proposition 9 (Inégalité triangulaire) :

Pour tous réels x et y , on a :

$$\left| |x| - |y| \right| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|. \quad (\text{XII.2})$$

Avec égalité si, et seulement si x et y sont de même signe.

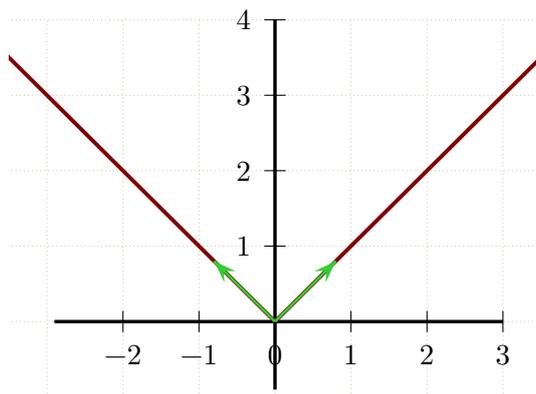
Exercice 8 : Résoudre l'équation $|x + y| + y = |x - y| - y$.

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions.

Proposition 10 (Fonction valeur absolue) :

- La fonction $x \mapsto |x|$ est définie et continue sur \mathbb{R} .
- La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ où elle est respectivement décroissante et croissante.

ATTENTION | La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable sur \mathbb{R} .

Figure XII.3 – Courbe représentative de $x \mapsto |x|$ sur \mathbb{R} .

Définition 10 (Distance) : Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle *distance* entre x et y , noté $d(x; y)$, le réel $|x - y|$.

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, d(x; y) = |x - y|.$$

Exercice 9 : Compléter le tableau suivant (NB : $\varepsilon > 0$) :

Valeur absolue	Distance	Inégalités	Intervalle(s)
$ x - 2 \leq 3$			
	$d(x, -1) \geq 5$		
		$1 \leq x \leq 2$	
			$] -5, 9[$
		$10 < x < 11$	
$ x + 1 \leq -1$			
	$d(x, a) \leq \varepsilon$		

IV.2 Partie entière

Théorème 11 (\mathbb{R} est archimédien) :

L'ensemble \mathbb{R} est archimédien *i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, y < nx$.

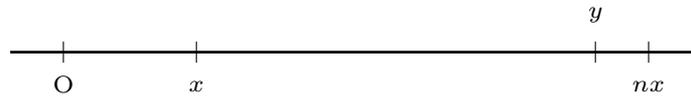


Figure XII.4 – \mathbb{R} est archimédien.

Corollaire 11.1 :

Pour tout $x \in]1; +\infty[$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y < x^n$.

Définition/Théorème 11 (Partie entière) : Soit $x \in \mathbb{R}$.

Il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p \leq x < p + 1. \tag{XII.3}$$

Cet entier, noté $[x]$ ou $E(x)$, est appelé *partie entière* de x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, [x] \leq x < [x] + 1.$$

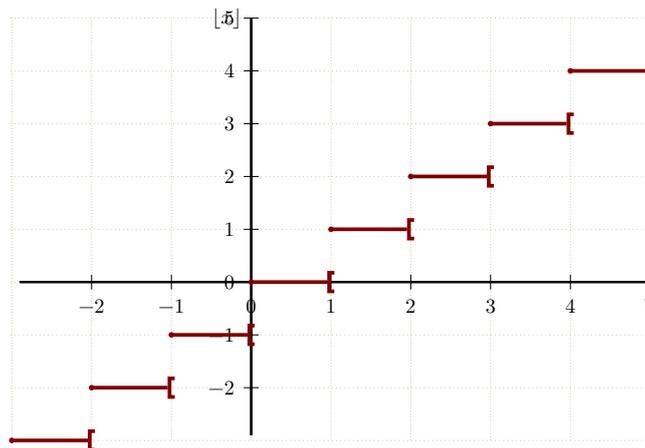


Figure XII.5 – $x \mapsto [x]$

Notamment, $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$.

Exemples 11 : $[5] = 5, [-2] = -2, [\pi] = 3, [-\pi] = -4, [e] = 2, [-e] = -3$.

ATTENTION | $[-7, 3] = -8$ et non -7 .

Exemple 12 : Soient $T > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur $n \in \mathbb{Z}$, a-t-on $x - nT \in [0; T[$?

$$x - nT \in [0; T[\iff 0 \leq x - nT < T \iff n \leq \frac{x}{T} < n + 1.$$

Par définition de la partie entière, l'entier $\left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$ convient.

À retenir, donc : $x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T \in [0; T[$.

Exemples 13 : Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ fixés.

Le mot « rang » désigne ci-dessous uniquement des entiers naturels.

— À partir de quel rang est-il vrai que $\frac{1}{n} < \varepsilon$?

Cette inégalité est vraie si et seulement si $n > \frac{1}{\varepsilon}$, donc à partir du rang $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ car $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{1}{\varepsilon}$.

— À partir de quel rang est-il vrai que $n^2 > A$?

C'est vrai si et seulement si $n > \sqrt{A}$, donc à partir du rang $\lfloor \sqrt{A} \rfloor + 1$.

— À partir de quel rang est-il vrai que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$?

C'est vrai si et seulement si $2^n > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$, donc à partir du rang $\max \left\{ 0, \left\lfloor -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rfloor + 1 \right\}$. Pourquoi ce « max » ? Parce que nous cherchons un entier naturel.

Corollaire 11.2 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad k \leq x \implies k \leq \lfloor x \rfloor.$$

Méthode 3 (Utilisation de la partie entière) :

Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Pour montrer que $k \leq \lfloor x \rfloor$, il suffit de montrer que $k \leq x$.

En effet, si $k \leq x$ alors k est un entier inférieur à x . Il est donc plus petit que le plus grand entier inférieur à x soit $k \leq \lfloor x \rfloor$.

Exercice 10 :

1. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

- Que peut-on en conclure pour la fonction partie entière ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.
 3. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$.
- À-t-on $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?
4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Proposition 12 (Propriétés de la partie entière) :

1. — Pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
— La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.
2. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est :
 - croissante sur \mathbb{R} ,
 - constante sur tout intervalle de la forme $[n; n + 1[$, $n \in \mathbb{Z}$,
 - continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,
 - continue à droite mais discontinue à gauche en tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11 : Représenter la fonction $d : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

V/ Notion de densité _____

V.1 Place des rationnels et des irrationnels dans \mathbb{R} _____

Théorème 13 (\mathbb{Q} et $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R}) :

Tout intervalle $]a; b[$ non vide de \mathbb{R} rencontre \mathbb{Q} et $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

Moralité, il y a ainsi toujours un rationnel entre deux irrationnels distincts et un irrationnel entre deux rationnels distincts.

Corollaire 13.1 :

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

- $\exists q \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - q| < \varepsilon$.
- $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x - r| < \varepsilon$.

On dit que \mathbb{R} est *adhérent* à \mathbb{Q} et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou que \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont *denses* dans \mathbb{R} .

En termes simples, une partie dense de \mathbb{R} est une partie de \mathbb{R} qui est un peu partout sans être forcément tout.

Corollaire 13.2 :

Tout réel est la limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

Exemples 14 (Parties denses dans \mathbb{R}) :

- L'anneau \mathbb{D} des nombres décimaux : $\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ (cf. corollaire (13.3)).
- \mathbb{N} et \mathbb{Z} ne sont pas denses dans \mathbb{R} .

V.2 Approximations décimales

Définition/Théorème 12 (Approximation décimale d'un réel) : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre décimal $p_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est appelé *approximation décimale par défaut* de x à la précision 10^{-n} et on a :

$$p_n \leq x < p_n + \frac{1}{10^n}.$$

Le nombre $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est appelé *approximation décimale par excès* de x à la précision 10^{-n} .

Remarque : $p_0 = \lfloor x \rfloor$.

Exemple 15 (Approximation décimale de $\sqrt{2}$) :

Prenons $x = \sqrt{2}$ et posons $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

- $1^2 \leq x^2 < 2^2$ donc $1 \leq x < 2$ à 10^0 près et

$$u_0 = \lfloor x \rfloor = 1 \quad (\text{partie entière de } x).$$

- $(10x)^2 = 200$ et $14^2 = 196 \leq (10x^2) < 15^2 = 225$, donc $1,4 \leq x < 1,5$ à 10^{-1} près et

$$u_1 = \frac{\lfloor 10x \rfloor}{10} = \frac{14}{10} = 1,4.$$

- $(100x)^2 = 20000$ et $141^2 \leq (100x^2) < 142^2$, donc $1,41 \leq x < 1,42$ à 10^{-2} près et

$$u_2 = \frac{\lfloor 100x \rfloor}{100} = \frac{141}{100} = 1,41.$$

— ...

On construit ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des approximations décimale de $\sqrt{2}$ par défaut à 10^{-n} près.

Exemple 16 : $3,1415 \leq \pi < 3,1416$ à 10^{-4} près.

Corollaire 13.3 :

\mathbb{D} est dense dans \mathbb{R} .

Remarque : Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, c'est aussi une autre manière de montrer que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

Contre-Exemple 17 :

\mathbb{N} et \mathbb{Z} ne sont pas denses dans \mathbb{R} .

Définition/Théorème 13 (Décimale) : Soient $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

Pour tout entier naturel n non nul, le nombre $d_n = 10^n(p_n - p_{n-1})$ est un entier compris entre 0 et 9 appelé $n^{\text{ème}}$ décimale de x .

Remarque : $p_n - p_{n-1} = d_n 10^{-n}$, ce qui entraîne, par télescopage, que :

$$\begin{aligned} p_n &= p_0 + \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{10^k} \\ &= p_0, d_1 d_2 \dots d_n. \end{aligned}$$

Comme la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x , on écrit alors :

$$x = p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} = p_0, d_1 d_2 d_3 \dots$$

Figure XII.6 – Développement décimal infini du réel x .

En conclusion :

À retenir 1 (Propriétés de \mathbb{R}) :

- $(\mathbb{R}, +, \times, \cdot)$ est une \mathbb{R} -algèbre commutative.
- \mathbb{R} est doté d'une relation d'ordre totale \leq qui permet de définir la norme $|x|$ d'un réel et la distance entre deux réels :

$$d(x; y) = |x - y|.$$

- La relation d'ordre permet de doter \mathbb{R} d'une famille de voisinages ouverts. \mathbb{R} possède donc une structure d'espace normé et d'espace métrique.
- \mathbb{R} possède la propriété de la borne supérieure.
- \mathbb{R} est archimédien. En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

- \mathbb{R} est indénombrable.
- \mathbb{R} contient \mathbb{Q} qui y est dense. De même que son complémentaire et l'ensemble \mathbb{D} des décimaux.

En particulier, tout réel peut être vu comme la limite d'une suite de rationnels, d'irrationnels ou de décimaux.

