Équations différentielles (linéaires)

I/ Équations du premier ordre

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - \left(2x - \dfrac{1}{x}\right) y = 1$ sur $]0\,;+\infty[$.
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$.
3. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 2 : Résoudre :

1. $(x+1)y' - xy + 1 = 0$ sur $]-1\,;+\infty[$
2. $y' = 2y + \sin(x) + \mathrm{e}^x + x$ sur $\mathbb{R}$
3. $y' = -\dfrac{y}{x} + \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
4. $y' + y\cos(x) = 0$
5. $e^x y' + x^2 y = 0$
6. $(1+x^2)y' + 2xy = 1 + 2x^2$
7. $y' - xy = xe^{x^2}$
8. $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
9. $xy' + 3y = \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]0;1[$
10. $2x(1+x)y' + (1+x)y = 2\sqrt{|x|}$ sur $]-1;0[$
11. $\cos(x)y' + \sin(x)y = 1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$
12. $y'\sin(x) + y\cos(x) = \sin^2 x$ sur $]0;\pi[$
13. $y' - y = (2x+1)\,\mathrm{e}^x$
14. $y' + y = \cos(2x) + 2\sin(2x)$
15. $y' + y = 4\mathrm{ch}\,(x)$

Exercice 3 : Donner la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(t)y' + \mathrm{sh}(t)y = 1 + t^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 4 : On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $ty' - 2y = t^3$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$
3. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = 0$.

Exercice 5 : Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 2xf(x) = 3\int_0^x f(t)dt$$

Exercice 6 (Solutions maximales (Hors-Programme)) :

1. Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

   Montrer que cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

   Montrer que cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ telle que $y(1) = 2$.

   Combien y a-t-il de solutions sur $\mathbb{R}$?
3. Résoudre l'équation différentielle $xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

   Combien y a-t-il de solutions sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = 2$?

   Combien y a-t-il de solutions sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = 2$ et $y(-1) = 1$?
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

   (a) $\sqrt{|x|}y' = y$.

   (b) $xy' = y$.
5. Résoudre sur le plus grand intervalle possible l'équation différentielle :

$$xy' - y = x^3.$$

Exercice 7 : Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = e^x + e^{5x}$.
2. $y'' - y' - 2y = \cos(x)$.
3. $y'' - y = x^2 + 1 - \mathrm{e}^x$.
4. $y'' - 4y' + 4y = 4\mathrm{sh}\,(2x)$
5. $y'' = e^x + \sin(x)$

Exercice 8 : Déterminer les solutions réelles et complexes de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$, et montrer qu'elles tendent vers 0 en $+\infty$.

II/ Équations du deuxième ordre

Exercice 9 : Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les conditions initiales indiquées :

1. $y'' + 6y' + 9y = 50\sin(x)$ avec $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$
2. $y'' - y' - 2y = 2x$ avec $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
3. $y'' - 4y' + 5y = \mathrm{e}^x$ avec $y(0) = \dfrac{1}{2}$ et $y'(0) = 0$.

4. $y'' + 2y' + y = \cos(2t)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
5. $y'' + y' - 2y = 8\sin(2t)$ avec $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.
6. $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 2\,\mathrm{sh}(x) - 3 \\ y(0) = \dfrac{3}{4} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
7. $\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 5 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 10 : Déterminer l'unique fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui vérifie

$$y'' - 2(1+i)y' + 2iy = t + i, \quad \text{avec} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Exercice 11 : On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$.

1. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$.
2. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{ch}\,(2x)$.

Exercice 12 : Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 13y = (12x + 8)\cos(x) + (4x + 2)\sin(x).$$

Exercice 13 (Variation de la constante d'ordre 2) :

Après avoir trouvé une solution homogène simple adapter la méthode de variation de la constante pour résoudre $t^2y'' + ty' - y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 14 : Déterminer toutes les fonctions $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall\, x \in [0; 1],\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

III/ Changement de fonction et de variable

Exercice 15 : On considère l'équation : $y'' + 2y' + 4y = xe^x$ (E)

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).

3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f :]0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\ln t.$$

   (a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).
   (b) En déduire une expression de f.

Exercice 16 : Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1. $x^2y'' + xy' + y = 0$, sur $]0\,;+\infty[$, en posant $x = e^t$;
2. $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$, sur $\mathbb{R}$, en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).
3. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (poser $u = e^x$).
4. $y'' - \left(6x + \dfrac{1}{x}\right) y' + 8x^2y = x^4$ (poser $u = x^2$).
5. $x(1-2\ln(x))y'' + (1+2\ln(x))y' - \dfrac{4}{x}y = 0$ (chercher une solution de la forme $y = x^\alpha$).

Exercice 17 (Équations à variables séparables) :

1. $t^3y' + y^3 = 0$ avec $y(1) = -1$
2. $y' = y(1+y)$.
3. $y' = \sin(x)\cos(y)$.
4. $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1}$.
5. $1 + xy' = e^y$, condition initiale : $y(1) = 1$.
6. $y' = \sqrt{|y|}$ et étudier les problèmes de raccordements.

Exercice 18 (Recollement (Hors-Programme)) : Résoudre l'équation différentielle

$$(1-x^2)y' - 2xy = x^2,$$

sur chacun des intervalles I suivants :

1. $\mathrm{I} =]1\,;+\infty[$,
2. $\mathrm{I} =]-1\,;1[$,
3. $\mathrm{I} =]-1\,;+\infty[$
4. et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

Exercice 19 (Équation de Bernoulli) : En posant $z = \dfrac{1}{y}$, résoudre les équations, dites de Bernoulli, suivantes :

1. $t^2y' + y + y^2 = 0$ avec $y(1) = 1$.
2. $y' = xy^2 + y$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 20 (Équation de Bernoulli bis) :

1. Montrer que l'équation de Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \qquad n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ n \neq 1,$$

se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = \dfrac{1}{y^{n-1}(x)}$.

2. Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

Exercice 21 (Équation de Riccati:) :

1. Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati
$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x),$$
alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).
2. Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \dfrac{1}{x}$ est une solution.

Exercice 22 : Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivables telles que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)f(-x) = 1. \tag{X.1}$$

Exercice 23 : On considère l'équation différentielle
$$(\mathrm{L}) : \; x^2y'' + 4xy' + \left(2 + x^2\right) y = 0.$$

1. Résoudre l'équation (L) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en posant $u = x^2y$.
2. Existe-t-il des solutions de (L) sur $\mathbb{R}$?