# Équations différentielles (linéaires)

## I/ Équations du premier ordre

**Exercice 1 :** Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - \left(2x - \dfrac{1}{x}\right) y = 1$ sur $]0\,;+\infty[$.
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$.
3. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0\,;+\infty[$.

**Correction :** Avant toute intégration, on vérifie bien que l'intégrande « $a$ » est continue sur l'intervalle considéré et on fera bien attention au fait que la primitive dépend de ce dernier.

1. **Résolution de l'équation homogène $y' - (2x - \dfrac{1}{x})y = 0$ :** Une primitive de $a(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ est $\mathrm{A}(x) = x^2 - \ln(x)$.

   Les solutions de l'équation homogène sont donc les $y(x) = \lambda \exp(x^2 - \ln(x)) = \lambda \dfrac{1}{x} \exp(x^2)$, pour $\lambda$ une constante réelle quelconque.

   **Recherche d'une solution particulière :** Nous allons utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation $y' - \left(2x - \dfrac{1}{x}\right) y = 1$.

   On cherche une telle solution sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)\dfrac{1}{x}\exp(x^2)$ où $x \longmapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

   On calcule d'abord, pour tout $x$ de $]0\,;+\infty[$,

$$y_p'(x) = \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2)$$

   Maintenant $y_p$ est solution de $y' - (2x + \dfrac{1}{x})y = 1$ si, et seulement si

$$\begin{aligned}
& y_p' - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y_p = 1 \\
\iff\ & \lambda'(x)x\exp(x^2) + \lambda(x)\left(-\frac{1}{x^2} + 2\right)\exp(x^2) - \left(2x - \frac{1}{x}\right)\lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \\
\text{(cela doit se simplifier !)} \quad \iff\ & \lambda'(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = 1 \\
\iff\ & \lambda'(x) = x\exp(-x^2)
\end{aligned}$$

   Ainsi on peut prendre $\lambda(x) = -\dfrac{1}{2}\exp(-x^2)$, ce qui fournit la solution particulière :

$$y_p(x) = \lambda(x)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)\frac{1}{x}\exp(x^2) = -\frac{1}{2x}.$$

Pour se rassurer, on n'oublie pas de vérifier que c'est bien une solution !

**Solution générale :** L'ensemble des solutions s'obtient par la somme de la solution particulière avec les solutions de l'équation homogène.

Autrement dit, les solutions sont les fonctions :

$$x \longmapsto y(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{\lambda}{x}\,\mathrm{e}^{x^2} = \frac{1}{2x}\left(2\lambda\,\mathrm{e}^{x^2} - 1\right) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

2. **Résolution de l'équation homogène $y' - y = 0$ :** Les solutions de l'équation homogène sont les

$$x \longmapsto y(x) = \lambda \exp(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Recherche d'une solution particulière :** On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)\exp(x)$ où $x \longmapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction.

Comme $y_0'(x) = \lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x)$ alors $y_0$ est solution de $y' - y = x^k \exp(x)$ si, et seulement si

$$\begin{aligned}\lambda'(x)\exp(x) + \lambda(x)\exp(x) - \lambda(x)\exp(x) = x^k\exp(x) &\iff \lambda'(x)\exp(x) = x^k\exp(x)\\ &\iff \lambda'(x) = x^k.\end{aligned}$$

On fixe $\lambda(x) = \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$, ce qui conduit à la solution particulière :

$$x \longmapsto y_0(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x).$$

**Solution générale :** L'ensemble des solutions est donc formé des fonctions :

$$x \longmapsto y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\exp(x) + \lambda\exp(x) = \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + \lambda\right)\mathrm{e}^x \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3. Le coefficient de $y'$ ne s'annule pas sur $]0\,;+\infty[$, l'équation peut donc se mettre sous la forme

$$y' + \frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}y = \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}$$

(a) Les solutions de l'équation homogène associée sont les $x \longmapsto y(x) = \lambda e^{\mathrm{A}(x)}$, où $\mathrm{A}$ est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de $a(x) = -\dfrac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On peut donc choisir $\mathrm{A}(x) = -\ln(u(x))$ avec $u(x) = 1 + \ln^2(x)$.

Les solutions de l'équation sont les $x \longmapsto y(x) = \lambda e^{-\ln(1+\ln^2(x))} = \dfrac{\lambda}{1+\ln^2(x)}$.

(b) Utilisons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.

On cherche $y_0(x) = \dfrac{\lambda(x)}{1+\ln^2(x)}$, avec $\lambda$ une fonction dérivable.

$y_0 = \lambda(x)z(x)$ est solution si, et seulement si

$$
\begin{aligned}
y_0' + \frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}y_0 &= \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff \lambda'(x)z(x) + \lambda(x)\underbrace{\left[z'(x) + \frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}z(x)\right]}_{\substack{=0 \text{ car } z(x)=\frac{1}{1+\ln^2(x)} \text{ est} \\ \text{solution de l'équation homogène}}} &= \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff \frac{\lambda'(x)}{1+\ln^2(x)} &= \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} \\
\iff \lambda'(x) &= \frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

On peut donc choisir $\lambda(x) = \ln(x)$ sur $]0\,;+\infty[$, ce qui donne la solution particulière $x \longmapsto y_0(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+\ln^2(x)}$.

(c) Les solutions sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène : ce sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto y(x) = \frac{\ln(x)+\lambda}{1+\ln^2(x)} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

où $\lambda$ est un paramètre réel.

Commentaires : *Le choix d'une primitive de $\lambda'$ se fait à constante additive près.*

*Si on avait choisi par exemple $\lambda(x) = \ln(x)+1$, la solution particulière aurait été différente, mais les solutions de l'équation avec second membre auraient été les fonctions de la forme*

$$x \longmapsto y(x) = \frac{\ln(x)+1+\lambda}{1+\ln^2(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$$

*Quitte à poser $\mu = 1+\lambda$, ce sont évidemment les mêmes que celles trouvées précédemment !*

**Exercice 2 :** Résoudre :

1. $(x+1)y' - xy + 1 = 0$ sur $]-1\,;+\infty[$
2. $y' = 2y + \sin(x) + \mathrm{e}^x + x$ sur $\mathbb{R}$
3. $y' = -\dfrac{y}{x} + \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
4. $y' + y\cos(x) = 0$
5. $e^x y' + x^2 y = 0$
6. $(1+x^2)y' + 2xy = 1 + 2x^2$
7. $y' - xy = xe^{x^2}$
8. $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
9. $xy' + 3y = \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]0;1[$
10. $2x(1+x)y' + (1+x)y = 2\sqrt{|x|}$ sur $]-1;0[$
11. $\cos(x)y' + \sin(x)y = 1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$
12. $y'\sin(x) + y\cos(x) = \sin^2 x$ sur $]0;\pi[$
13. $y' - y = (2x+1)\,\mathrm{e}^x$
14. $y' + y = \cos(2x) + 2\sin(2x)$
15. $y' + y = 4\mathrm{ch}\,(x)$

**Correction :**

4. $\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \lambda e^{-\sin(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
5. $\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \lambda(x^2+2x+2)e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
6. $\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2} + \dfrac{x+\frac{2}{3}x^3}{1+x^2},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
7. $\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + e^{x^2},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
8. $\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \dfrac{\lambda}{1+x^2} + \dfrac{\ln(x)}{1+x^2},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
9. $\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \dfrac{\lambda}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x^3}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right),\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
10. $\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{|x|}} - \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{|x|}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
11. $\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \lambda\cos(x) + \sin(x),\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
12. $\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto \dfrac{\lambda}{\sin(x)} + \dfrac{x}{2\sin(x)} - \dfrac{\cos(x)}{2},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
13. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $\lambda\,\mathrm{e}^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

    Comme le coefficient dans l'exponentielle correspond à celui du membre de droite, on va chercher une solution particulière sous la forme

    $$y_p(x) = x(ax+b)\,\mathrm{e}^x.$$

    On a alors
    $$y_p'(x) = (ax^2+(2a+b)x+b)\,\mathrm{e}^x$$
    $$y_p'(x) - y_p(x) = (2ax+b)\,\mathrm{e}^x.$$

    $y_p$ est donc solution de l'équation complète si $2ax+b = 2x+1$.

    On trouve $a=b=1$ pour obtenir la solution particulière $y_p : x \longmapsto (x^2+x)\,\mathrm{e}^x$.

    Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions de la forme :

    $$x \longmapsto (x^2+x+\lambda)\,\mathrm{e}^x.$$

14. Le même raisonnement donne pour la deuxième :

    $$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\sin(x).$$

**Exercice 3 :** Donner la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(t)y' + \mathrm{sh}(t)y = 1+t^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

**Exercice 4 :** On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $ty' - 2y = t^3$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$
3. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = 0$.

**Exercice 5 :** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2xf(x) = 3\int_0^x f(t)dt$$

Équations différentielles (linéaires)

**Exercice 6 (Solutions maximales (Hors-Programme)) :**

1. Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

   Montrer que cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

   Montrer que cette équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ telle que $y(1) = 2$.

   Combien y a-t-il de solutions sur $\mathbb{R}$ ?
3. Résoudre l'équation différentielle $xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

   Combien y a-t-il de solutions sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = 2$ ?

   Combien y a-t-il de solutions sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = 2$ et $y(-1) = 1$ ?
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

   (a) $\sqrt{|x|}y' = y$.

   (b) $xy' = y$.
5. Résoudre sur le plus grand intervalle possible l'équation différentielle :

$$xy' - y = x^3.$$

**Exercice 7 (Recollement (Hors-Programme)) :** Résoudre l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y' - 2xy = x^2,$$

sur chacun des intervalles I suivants :

1. $\mathrm{I} = ]1\,;+\infty[$,
2. $\mathrm{I} = ]-1\,;1[$,
3. $\mathrm{I} = ]-1\,;+\infty[$
4. et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

**Correction :** L'équation différentielle à résoudre dans cet exercice est linéaire du premier ordre. On note $(\mathrm{E})$ l'équation différentielle proposée et $(\mathrm{E_H})$ l'équation homogène associée.

1. Soit I l'un des deux intervalles $]-1\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$.

   Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{-2x}{1-x^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{x^2}{1-x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de $(\mathrm{E})$ sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où $f_0$ est une solution particulière de $(\mathrm{E})$ et $f_1$ est une solution particulière non nulle de $(\mathrm{E_H})$.

   Soit $f$ une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (\mathrm{E}) \text{ sur } \mathrm{I} &\iff \forall\, x \in \mathrm{I},\ (1-x^2)f'(x) - 2xf(x) = x^2 \\ &\iff \forall\, x \in \mathrm{I},\ ((1-x^2)f)'(x) = x^2 \\ &\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall\, x \in \mathrm{I},\ (1-x^2)f(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda \\ &\iff \exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R} / \ \forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) = \frac{x^3+\lambda_0}{3(1-x^2)}, \quad \text{(en renommant } \lambda_0 \text{ la constante } 3\lambda). \end{aligned}$$

Attention ! La constante $\lambda_0$ dépend évidemment de l'intervalle $\mathrm{I}$ choisi.

3. Si $\mathrm{I} = ]-1\,;+\infty[$.

Soit $f$ une éventuelle solution de $(\mathrm{E})$ sur $\mathrm{I}$. Les restrictions de $f$ à $]-1\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$ sont encore solution de $(\mathrm{E})$ et donc de la forme précédente.

Par suite, nécessairement, il existe deux constantes $\lambda_1$ et$\lambda_2$ telles que, pour $-1 < x < 1$, $f(x) = \dfrac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)}$ et pour $x > 1$, $f(x) = \dfrac{x^3+\lambda_2}{3(1-x^2)}$.

Enfin, l'équation impose $-2 \times 1 \times f(1) = 1^2$ soit $f(1) = -\dfrac{1}{2}$.

En résumé, une éventuelle solution de $(\mathrm{E})$ sur $\mathrm{I}$ est nécessairement de la forme :

$$\forall\, x > -1,\ f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)} & \text{si} \quad -1 < x < 1, \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1, \\ f_2(x) = \dfrac{x^3+\lambda_2}{3(1-x^2)} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Réciproquement, une telle fonction $f$ ne sera solution de $(\mathrm{E})$ si, et seulement si elle est continue et dérivable sur $]-1\,;+\infty[$. Les restrictions $f_1$ et $f_2$ sont clairement dérivables, respectivement, sur leur intervalle de définition.

Il nous reste à vérifier qu'en les points, dits de raccordement, la fonction $f$ est continue et dérivable.

— $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f_1(x)$ n'existe que si $\lambda_1 = -1$ et dans ce cas

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f_1(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \frac{x^2+x+1}{-3(1+x)} = -\frac{1}{2} = f(1).$$

La solution $f$ est donc continue à gauche en $1$.

— $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f_2(x)$ n'existe que si $\lambda_2 = -1$ et dans ce cas

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f_1(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \frac{x^2+x+1}{-3(1+x)} = -\frac{1}{2} = f(1).$$

La solution $f$ est donc également continue à droite en $1$.

Une telle solution $f$ avec $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ est donc bien continue sur $]-1\,;+\infty[$.

Vérifions maintenant si la fonction définie par

$$\forall\, x > -1,\ f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{x^3-1}{3(1-x^2)} = -\dfrac{x^2+x+1}{3(1+x)} & \text{si} \quad x \neq -1, \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

est dérivable sur I.

— Sur $]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$, la fonction $f$ est clairement dérivable et on a :

$$\forall\, x\in\,]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[\,,\ f'(x)=\frac{x(x+2)}{3(1+x)^2}.$$

— En 1, on revient à la définition et on regarde, la limite des taux d'accroissement en 1 par valeurs supérieures et inférieures :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{-\frac{x^2+x+1}{3(1+x)}+\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{2x^2-x-1}{6(1+x)(1-x)}=\frac{2x+1}{6(1+x)}.$$

D'où $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+1}{6(1+x)}=\dfrac{1}{4}<\infty$. Elle est dérivable en 1.

La fonction $f$ ainsi déterminée par les choix précédents de $\lambda_1$ et $\lambda_2$ est donc bien dérivable sur I. C'est une solution de (E) sur I. C'est même la seule.

Commentaires : $\forall\, x\in\,]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[,\ \lim\limits_{x\to1}f'(x)=\dfrac{x(x+2)}{3(1+x)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x+2)}{3(1+x)^2}=\dfrac{1}{4}$.

*La fonction $f$ est donc même de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*

4. Si $\mathrm{I}=\mathbb{R}$, soit $f$ une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$. La restriction de $f$ à $]-1\,;+\infty[$ est nécessairement la fonction précédente.

   Or, cette fonction tend vers $-\infty$ quand $x$ tend vers $-1$ par valeurs supérieures.

   Donc, $f$ ne peut être continue sur $\mathbb{R}$ et (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$ tout entier.

## II/ Équations du deuxième ordre

**Exercice 8 :** Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

1. $y''-3y'+2y=e^x+e^{5x}$.
2. $y''-y'-2y=\cos(x)$.
3. $y''-y=x^2+1-\mathrm{e}^x$.
4. $y''-4y'+4y=4\mathrm{sh}\,(2x)$
5. $y''=e^x+\sin(x)$

**Correction :**

1. $\mathcal{S}_\mathbb{R}=\left\{x\longmapsto\lambda_1e^x+\lambda_2e^{2x}-xe^x+\dfrac{1}{12}e^{5x},\ (\lambda_1\,;\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
2. $\mathcal{S}_\mathbb{R}=\left\{x\longmapsto\lambda_1e^{2x}+\lambda_2e^{-x}-\dfrac{3\cos(x)+\sin(x)}{10},\ (\lambda_1\,;\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
3. (a) L'équation caractéristique est $r^2-1=0$ dont les solutions sont $\pm1$.
   (b) Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x\longmapsto\lambda\,\mathrm{e}^x+\mu\,\mathrm{e}^{-x}$.
   (c) Pour chercher une solution particulière, utilisons le principe de superposition :
      i. On commence par chercher une solution de l'équation $y''-y=x^2+1$ sous la forme $y_1(x)=ax^2+bx+c$.

On a donc $y_1''(x) = 2a \iff -ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + 1 \iff a = -1$, $b = 0$ et $c = 2a - 1 = -3$.

On obtient donc $y_1(x) = -x^2 - 3$.

ii. Cherchons maintenant une solution particulière à l'équation $y'' - y = \mathrm{e}^x$ sous la forme $y_2(x) = (\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^x$ puisque 1 est racine de l'équation caractéristique.

On a donc $y_1'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)\,\mathrm{e}^x$, et $y''(x) = (\alpha + 2\alpha + \beta)\,\mathrm{e}^x$, donc

$$\begin{aligned} y'' - y = \mathrm{e}^x &\iff \alpha x + 2\alpha + \beta - (\alpha x + \beta) = 1 \\ &\iff 2\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On peut prendre n'importe quelle valeur pour $\beta$, choisissons le par exemple tel que $y_2(x) = \dfrac{1}{2}x\,\mathrm{e}^x$.

Une solution particulière de l'équation complète est donc $y_p : x \longmapsto -x^2 - 3 - \dfrac{1}{2}x\,\mathrm{e}^x$.

La solution générale est donc :

$$x \longmapsto -x^2 - 3 + \left(\lambda - \frac{1}{2}x\right)\,\mathrm{e}^x + \mu\,\mathrm{e}^{-x}.$$

4. — **Solution homogène :** $(\mathrm{E}_0) : y'' - 4y' + 4y = 0$.

$(\mathrm{E}_c) : r^2 - 4r + 4 = 0$ a une seule solution 2.

Les solutions réelles de $(\mathrm{E}_0)$ sont les

$$x \longmapsto (\lambda_1 x + \lambda_2)\,\mathrm{e}^{2x} \text{ avec } (\lambda_1\,;\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

— **Recherche de solution particulière :** Comme 2 est racine double de l'équation caractéristique, on va utiliser le principe de superposition pour résoudre séparément les équations $y'' - 4y' + 4y = -2\,\mathrm{e}^{-2x}$ et $y'' - 4y' + 4y = 2\,\mathrm{e}^{2x}$.

La première équation ne pose pas de problèmes et une solution particulière sera aisément trouvée sous la forme $y_{p_1} = \lambda\,\mathrm{e}^{-2x}$ où $\lambda$ est solution de $4\lambda + 8\lambda + 4\lambda = -2$ soit $\lambda = -\dfrac{1}{8}$ et $y_{p_1} = -\dfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Pour la seconde, on cherche une solution $y_{p_2}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} y_{p_2} &= \lambda x^2\,\mathrm{e}^{2x} \\ y_{p_2}' &= \lambda\,(2x^2 + 2x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ y_{p_2}'' &= \lambda\,(4x^2 + 8x + 2)\,\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

$y_p$ sera solution de notre équation si, et seulement si

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{e}^{2x} &= y_p'' - 4y_p' + 4y_p \\ 2\,\mathrm{e}^{2x} &= 2\lambda\,\mathrm{e}^{2x} \\ \lambda &= 1 \text{ et } y_{p_2} = x^2\,\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = 4\mathrm{sh}\,(2x)$ est donc $x \longmapsto x^2\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2x}$.

— **Solution générale :** $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \longmapsto (\lambda_1 x + \lambda_2)e^{2x} + x^2 e^{2x} - \dfrac{1}{8}e^{-2x},\ (\lambda_1\,;\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$

5. $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \longmapsto e^x - \sin(x) + \lambda_1 x + \lambda_2,\ (\lambda_1\,;\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$

**Exercice 9 :** Déterminer les solutions réelles et complexes de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$, et montrer qu'elles tendent vers 0 en $+\infty$.

**Exercice 10 :** Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les conditions initiales indiquées :

1. $y'' + 6y' + 9y = 50\sin(x)$ avec $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$
2. $y'' - y' - 2y = 2x$ avec $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
3. $y'' - 4y' + 5y = \mathrm{e}^x$ avec $y(0) = \dfrac{1}{2}$ et $y'(0) = 0$.
4. $y'' + 2y' + y = \cos(2t)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
5. $y'' + y' - 2y = 8\sin(2t)$ avec $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.
6. $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 2\,\mathrm{sh}(x) - 3 \\ y(0) = \dfrac{3}{4} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
7. $\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 5 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

**Correction :**

1. $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \longmapsto -3\cos(x) + 4\sin(x) + 5(2x+1)e^{-3x}\}$.
2. $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \longmapsto -e^{-x} + \dfrac{1}{2}e^{2x} - x + \dfrac{1}{2}\right\}$.

**Exercice 11 :** Déterminer l'unique fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui vérifie

$$y'' - 2(1+i)y' + 2iy = t + i, \quad \text{avec} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

**Exercice 12 :** On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$.

1. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$.
2. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{ch}\,(2x)$.

**Correction :**

1. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2 - 4r + 4 = 0$, pour laquelle $r = 2$ est racine double.

   Les solutions de l'équation homogène sont donc les $(\lambda x + \mu)e^{2x}$.

   Lorsque $d(x) = e^{-2x}$, on cherche une solution particulière sous la forme $ae^{-2x}$, qui convient si $a = \dfrac{1}{16}$.

   Lorsque $d(x) = e^{2x}$, comme $2$ est la racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution comme le produit de $e^{2x}$ par un polynôme de degré $2$.

   Comme on sait déjà que $(\lambda x + \mu)e^{2x}$ est solution de l'équation homogène, il est inutile de faire intervenir des termes de degré $1$ et $0$. On cherche donc une solution de la forme $ax^2e^{2x}$, qui convient si, et seulement si $a = \dfrac{1}{2}$.
2. Puisque $\dfrac{1}{2}\text{ch}\,(2x) = \dfrac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})$, d'après le principe de superposition les solutions générales sont obtenues sous la forme

$$x \longmapsto y(x) = \frac{1}{64}e^{-2x} + \frac{1}{8}x^2e^{2x} + (\lambda x + \mu)e^{2x}, \quad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 13 :** Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 13y = (12x + 8)\cos(x) + (4x + 2)\sin(x).$$

**Correction :** Les racines de l'équation caractéristique sont $2 \pm 3\,\mathrm{i}$ donc les solutions homogènes sont de la forme :

$$y_{\mathrm{H}} : x \longmapsto (\lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x))\ \mathrm{e}^{2x}.$$

Cherchons une solutions particulières sous la forme :

$$\begin{aligned} 13\times\ y_p &= (ax+b)\cos(x)+(cx+d)\sin(x) \\ -4\times\ y_p' &= (cx+a+d)\cos(x)+(-ax-b+c)\sin(x) \\ y_p'' &= (-ax-b+2c)\cos(x)+(-cx-2a-d)\sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} (12x+8)\cos(x) \\ + \\ (4x+2)\sin(x) \end{matrix} = \begin{matrix} \Big((12a-4c)x-4a+12b+2c-4d\Big)\cos(x) \\ + \\ \Big((12c+4a)x-2a+4b-4c+12d\Big)\sin(x) \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} 12a - 4c = 12 \\ -4a+12b+2c-4d = 8 \\ 4a+12c = 4 \\ -2a+4b-4c+12d = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a - c = 3 \\ -2a+6b+c-2d = 4 \\ a+3c = 1 \\ -a+2b-2c+6d = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ 3b - d = 3 \\ c = 0 \\ b+3d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=0 \\ d=0. \end{cases}$$

Une solutions particulière sera donc $y_p : x \longmapsto (x+1)\cos(x)$.

Les solutions générales sont alors les fonctions

$$y : x \longmapsto (\lambda\cos(3x)+\mu\sin(3x))\,\mathrm{e}^{2x}+(x+1)\cos(x).$$

**Exercice 14 (Variation de la constante d'ordre 2) :**

Après avoir trouvé une solution homogène simple adapter la méthode de variation de la constante pour résoudre $t^2y''+ty'-y=1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Correction :** $y : t \longmapsto t$ est une solution de $\mathrm{E}_0$.

On applique la méthode de Lagrange en posant $y(t)=\lambda(t)t$.

On arrive à $t^3\lambda''+3t^2\lambda'=0$.

D'où,$\lambda(t)=\dfrac{1}{t^2}$ après deux intégrations convient et fournit une deuxième solution de l'équation $\mathrm{E}_0$ : $y : t \longmapsto \dfrac{1}{t}$.

En remarquant qu'une solution particulière est la constante $1$, on trouve l'ensemble des solutions :

$$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*}=\left\{t\longmapsto\frac{\lambda}{t}+\mu t-1,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}}.$$

**Exercice 15 :** Déterminer toutes les fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall\, x \in [0;1],\ \ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

**Correction :** Une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ convient si, et seulement si

- $f$ est dérivable
- $f$ est solution de $y' + y = c$
- $f$ vérifie $f(0) + f(1) = c$ (où $c$ est un réel quelconque)

Or, les solutions de l'équation différentielle $y' + y = c$ sont exactement les $f : x \longmapsto \lambda e^{-x} + c$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ (en effet, on voit facilement que la fonction constante égale à $c$ est une solution particulière de $y' + y = c$).

Clairement, ces fonctions sont dérivables et $f(0) + f(1) = \lambda(1 + e^{-1}) + 2c$.

Donc, la troisième condition est satisfaite si, et seulement si $-\lambda(1 + e^{-1}) = c$.

Les solutions du problème sont exactement les

$$x \longmapsto f(x) = \lambda(e^{-x} - 1 - e^{-1}),\ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

## III/ Changement de fonction et de variable

**Exercice 16 :** On considère l'équation : $y'' + 2y' + 4y = xe^x$ (E)

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3. Déterminer l'unique solution $h$ de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f : ]0\,;+\infty[ \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \ln t.$$

   (a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que $g$ est solution de (E).
   (b) En déduire une expression de $f$.

**Correction :**

1. Le polynôme caractéristique associé à E est : $p(x) = x^2 + 2x + 4$ ; son discriminant est $\Delta = -12$ et il a pour racines les 2 nombres complexes $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$.

   Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions définies par :

   $$y(x) = e^{-x}\left(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x\right)$$

   obtenues lorsque $a, b$ décrivent $\mathbb{R}$.
2. Le second membre est de la forme $e^{\lambda x}\mathrm{Q}(x)$ avec $\lambda = 1$ et $\mathrm{Q}(x) = x$.

On cherchera une solution de l'équation sous la forme : $y_p(x) = \mathrm{R}(x)e^x$ avec $\mathrm{R}$ polynôme de degré égal à celui de $\mathrm{Q}$ puisque $p(1) \neq 0$.

On pose donc $\mathrm{R}(x) = ax + b$.

D'où,

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$

Donc $y_p$ est solution si, et seulement si $7ax + 7a + 4b = x$.

On trouve après identification des coefficients :

$$a = \frac{1}{7} \quad \text{et} \quad b = -\frac{4}{49}.$$

La fonction $x \longmapsto y_p(x) = \frac{1}{7}\left(x - \frac{4}{7}\right)e^x$ est donc solution de $\mathrm{E}$ et la forme générale des solutions de $\mathrm{E}$ est :

$$x \longmapsto y(x) = e^{-x}(a\cos\sqrt{3}x + b\sin\sqrt{3}x) + \frac{1}{7}\left(x - \frac{4}{7}\right)e^x, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Soit $h$ une solution de $\mathrm{E}$.

   Les conditions $h(0) = 1$, $h(1) = 0$ sont réalisées si, et seulement si

$$a = \frac{53}{49} \quad \text{et} \quad b = -\frac{53\cos\sqrt{3} + 3e^2}{49\sin\sqrt{3}}.$$

4. (a) On a $g'(x) = e^x f'(e^x)$ et $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$.

   D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x}f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \ln e^x = xe^x.$$

   Donc $g$ est solution de $\mathrm{E}$.

   (b) Réciproquement pour $f(t) = g(\ln(t))$ où $g$ est une solution de $\mathrm{E}$ on montre que $f$ est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 2.

   Les fonctions $f$ recherchées sont donc de la forme :

$$t \longmapsto \frac{1}{t}\left(a\cos(\sqrt{3}\ln(t)) + b\sin(\sqrt{3}\ln(t))\right) + \frac{t}{7}\left(\ln(t) - \frac{4}{7}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 17 :** Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1. $x^2y'' + xy' + y = 0$, sur $]0\,;+\infty[$, en posant $x = e^t$ ;
2. $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0$, sur $\mathbb{R}$, en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).
3. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (poser $u = e^x$).
4. $y'' - \left(6x + \frac{1}{x}\right)y' + 8x^2y = x^4$ (poser $u = x^2$).
5. $x(1 - 2\ln(x))y'' + (1 + 2\ln(x))y' - \frac{4}{x}y = 0$ (chercher une solution de la forme $y = x^\alpha$).

**Correction :**

1. Puisqu'on cherche $y$ fonction de $x \in ]0\,;+\infty[$, et que l'application $t \longmapsto e^t$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$, on peut poser $x = e^t$ et $z(t) = y(e^t)$.

   On a alors $t = \ln(x)$ et $y(x) = z(\ln(x))$.

   Ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & z(\ln(x)) = z(t) \\ y'(x) & = & \dfrac{1}{x} z'(\ln(x)) = e^{-t} z'(t) \\ y''(x) & = & -\dfrac{1}{x^2} z'(\ln(x)) + \dfrac{1}{x^2} z''(\ln(x)) = -e^{-2t} z'(t) + e^{-2t} z''(t) \end{array}$$

   En remplaçant, on obtient donc que

$$\forall\, x \in ]0\,;+\infty[\,,\ x^2 y'' + xy' + y = 0 \Longleftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{R},\ z''(t) + z(t) = 0$$

   autrement dit, $z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   Finalement, les solutions de l'équation de départ sont de la forme

$$y(x) = z(\ln(x)) = \lambda \cos(\ln(x)) + \mu \sin(\ln(x))$$

   où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. L'application $t \longmapsto \tan t$ étant bijective de $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, on peut poser $x = \tan t$ et $z(t) = y(\tan t)$. On a alors $t = \arctan x$ et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & z(\arctan x) = z(t) \\ y'(x) & = & \dfrac{1}{1+x^2} z'(\arctan x) \\ y''(x) & = & \dfrac{1}{(1+x^2)^2} (z''(\arctan x) - 2x z'(\arctan x)) \end{array}$$

   En remplaçant, on obtient que $z$ est solution de l'équation différentielle $z'' + mz = 0$. Pour résoudre cette équation, on doit distinguer trois cas :

   — $m < 0$ : alors $z(t) = \lambda e^{\sqrt{-m}t} + \mu e^{-\sqrt{-m}t}$ et donc

$$y(x) = \lambda e^{\sqrt{-m}\arctan x} + \mu e^{-\sqrt{-m}\arctan x},$$

   — $m = 0$ : $z'' = 0$ et donc $z(t) = \lambda t + \mu$ et $y(x) = \lambda \arctan x + \mu$,

   — $m > 0$ : alors $z(t) = \lambda \cos(\sqrt{m}t) + \mu \sin(\sqrt{m}t)$ et donc

$$y(x) = \lambda \cos(\sqrt{m}\arctan x) + \mu \sin(\sqrt{m}\arctan x)$$

   où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Posons $u = e^x$, puis $z(u) = y(x)$ soit $z(e^x) = y(x)$. On en déduit

$$y'(x) = e^x z'(e^x) \text{ puis } y''(x) = e^x z'(e^x) + e^{2x} z''(e^x).$$

   Si $y$ vérifie l'équation différentielle, alors $z$ vérifie l'équation

$$e^{2x} z''(t) - e^{2x} z(t) = e^{3x},$$

soit
$$z'' - z = u.$$

On résout maintenant très facilement cette équation. Les solutions de l'équation homogène sont
$$z(u) = \lambda e^u + \mu e^{-u}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

La fonction $u \mapsto -u$ est solution particulière de l'équation, et donc la solution générale de l'équation vérifiée par $z$ est de la forme
$$z(u) = \lambda e^u + \mu e^{-u} - u, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Revenant à $y$, on trouve
$$y(x) = \lambda e^{e^x} + \mu e^{-e^x} - e^x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4. $x \longmapsto \lambda e^{x^2} + \mu e^{2x^2} + \dfrac{2x^2+3}{16}$.
5. $x \longmapsto \lambda x^2 + \mu \ln(x)$.

$$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 18 (Équations à variables séparables) :**

1. $t^3 y' + y^3 = 0$ avec $y(1) = -1$
2. $y' = y(1+y)$.
3. $y' = \sin(x)\cos(y)$.
4. $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1}$.
5. $1 + xy' = e^y$, condition initiale : $y(1) = 1$.
6. $y' = \sqrt{|y|}$ et étudier les problèmes de raccordements.

**Correction :**

1. $y$ ne doit pas être constamment nulle et si une telle solution existe, il doit exister un intervalle $\mathrm{I}$ sur lequel $y$ ne s'annule pas *i.e.* un tel intervalle ne peut pas contenir $0$ et sur $\mathrm{I}$ l'équation est équivalente à :
$$\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{t^3}.$$

   C'est une équation à variable séparée.

   Elle est équivalente à : $-\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{t^2} + \lambda$, ce qui donne $y^2 = -\dfrac{t^2}{1+\lambda t^2}$.

   La condition initiale impose $\lambda = -2$.

   Comme $y$ ne s'annule pas sur $\mathrm{I}$ qui ne contient pas $0$, $y$ garde un signe constant et donc $\forall t \in \mathrm{I},\ y(t) = \sqrt{\dfrac{t^2}{2t^2-1}}$.

   Cette solution est définie sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;+\infty\right[$.
2. $y = -1 + \dfrac{1}{1-\lambda e^x}$ ou $y = -1$.

3. $y \equiv 2\arctan(\lambda e^{-\cos(x)}) - \dfrac{\pi}{2} (\bmod \pi)$.
4. $y = \pm\sqrt{1 + (\sqrt{x} + \lambda)^2}$ ou $y = \pm 1$.
5. $y = -\ln(1 - x(1 - 1/e))$.
6. $y = \left(\lambda + \dfrac{x}{2}\right)\left|\lambda + \dfrac{x}{2}\right|$ ou $y = 0$.

**Exercice 19 (Équation de Bernoulli ) :** En posant $z = \dfrac{1}{y}$, résoudre les équations, dites de Bernoulli, suivantes :

1. $t^2 y' + y + y^2 = 0$ avec $y(1) = 1$.
2. $y' = xy^2 + y$ avec $y(0) = 1$.

**Correction :**

1. $y$ est une solution non constamment nulle. On pose donc $y = z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ ce qui donne :

$$z' = \frac{1}{t^2} z + \frac{1}{t^2}.$$

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies par $z(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$ et une solution particulière est $z_p(t) = -1$.

Les solutions générales sont donc les fonctions définies par $z(t) = -1 + \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$.

La condition initiale donne $\lambda = 2\,\mathrm{e}$.

D'où $y : t \longmapsto \dfrac{1}{2\,\mathrm{e}^{1-\frac{1}{t}} - 1}$.

D'après les théorèmes généraux, cette fonction est dérivable sur $]-\infty\,;0[$, $\left]0\,;\dfrac{1}{1+\ln 2}\right[$ ou $\left]\dfrac{1}{1+\ln 2}\,;+\infty\right[$.

Solution d'une équation différentielle, notre solution ne sera définie que sur un seul de ces trois intervalles avant que l'on tente de les recoller. La condition initiale donnée pour $t = 1 \in \left]-\infty\,;\dfrac{1}{1+\ln 2}\right[$ impose ce dernier.

Notre solution est donc $y : t \longmapsto \dfrac{1}{2\,\mathrm{e}^{1-\frac{1}{t}} - 1}$ définie sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{1+\ln 2}\right[$.

Commentaires : *Comme $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} = 0$, si l'on avait imposé une condition initiale sur un intervalle de la forme $]0\,;a[$, on aurait pu espérer prolonger par continuité notre solution sur $[0\,;a[$ et peut-être de manière deux fois dérivable.*

2. $y$ est une solution non constamment nulle. On pose encore $y = z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ ce qui donne :

$$y' = xy^2 + y \iff -\left(-\frac{y'}{y^2}\right) = x + \frac{1}{y} \iff z' = -z - x \text{ avec } z(0) = 1.$$

(a) Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions définies par $z(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-x}$ et une solution particulière est $z_p(t) = 1 - x$.

Les solutions générales sont donc les fonctions définies par $z(t) = 1 - x + \lambda\,\mathrm{e}^{-x}$.

La condition initiale impose $\lambda = 0$.

D'où $y(t) = \dfrac{1}{1-x}$ définie sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.

**Exercice 20 (Équation de Bernoulli bis) :**

1. Montrer que l'équation de Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \qquad n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ n \neq 1,$$

se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = \dfrac{1}{y^{n-1}(x)}$.

2. Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

**Correction :**

1. On suppose qu'une solution $y$ ne s'annule pas.

On divise l'équation $y' + a(x)y + b(x)y^n = 0$ par $y^n$, ce qui donne

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} + b(x) = 0.$$

On pose $z(x) = \dfrac{1}{y^{n-1}}$ et donc $z'(x) = (1-n)\dfrac{y'}{y^n}$. L'équation de Bernoulli devient une équation différentielle linéaire :

$$\frac{1}{1-n}z' + a(x)z + b(x) = 0$$

2. Équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

Cherchons les solutions $y$ qui ne s'annulent pas. On peut alors diviser par $y^3$ pour obtenir :

$$x\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} - x = 0$$

On pose $z(x) = \dfrac{1}{y^2(x)}$, et donc $z'(x) = -2\dfrac{y'(x)}{y(x)^3}$. L'équation différentielle s'exprime alors $\dfrac{-1}{2}xz' + z - x = 0$, c'est-à-dire :

$$xz' - 2z = -2x.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette dernière équation sont les

$$z(x) = \begin{cases} \lambda_+ x^2 + 2x \text{ si } x \geqslant 0 \\ \lambda_- x^2 + 2x \text{ si } x < 0 \end{cases} \quad , \quad \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$$

Équations différentielles (linéaires)

Comme on a posé $z(x)=\dfrac{1}{y^2(x)}$, on se restreint à un intervalle $\mathrm{I}$ sur lequel $z(x)>0$ : nécessairement $0\notin \mathrm{I}$, donc on considère $z(x)=\lambda x^2+2x$, qui est strictement positif sur $\mathrm{I}_\lambda$ où

$$\mathrm{I}_\lambda=\begin{cases} ]0\,;+\infty[ & \text{si } \lambda=0\\ \left]0;-\dfrac{2}{\lambda}\right[ & \text{si } \lambda<0\\ \left]-\infty;-\dfrac{2}{\lambda}\right[ \text{ ou } ]0;+\infty[ & \text{si } \lambda>0\end{cases}$$

On a $(y(x))^2=\dfrac{1}{z(x)}$ pour tout $x\in \mathrm{I}_\lambda$ et donc $y(x)=\epsilon(x)\dfrac{1}{\sqrt{z(x)}}$, où $\epsilon(x)=\pm 1$.

Or, $y$ est continue sur l'intervalle $\mathrm{I}_\lambda$, et ne s'annule pas par hypothèse : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $y$ ne peut pas prendre à la fois des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, donc $\epsilon(x)$ est soit constant égal à $1$, soit constant égal à $-1$. Ainsi les solutions cherchées sont les :

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}} \text{ ou } y(x)=\frac{-1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}} \quad \text{sur } \mathrm{I}_\lambda \qquad (\lambda\in\mathbb{R})$$

Noter que la solution nulle est aussi solution.

**Exercice 21 (Équation de Riccati:) :**

1. Montrer que si $y_0$ est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y'+a(x)y+b(x)y^2=c(x),$$

   alors la fonction définie par $u(x)=y(x)-y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n=2$).
2. Résoudre $x^2(y'+y^2)=xy-1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x)=\dfrac{1}{x}$ est une solution.

**Correction :**

1. Soit $y_0$ une solution de $y'+a(x)y+b(x)y^2=c(x)$. Posons $u(x)=y(x)-y_0(x)$, donc $y=u+y_0$. L'équation devient :

$$u'+y_0'+a(x)(u+y_0)+b(x)(u^2+2uy_0+y_0^2)=c(x)$$

   Comme $y_0$ est une solution particulière alors

$$y_0'+a(x)y_0+b(x)y_0^2=c(x)$$

   Et donc l'équation se simplifie en :

$$u'+(a(x)+2y_0(x)b(x))u+b(x)u^2=0$$

   qui est une équation du type Bernoulli.
2. Équation $x^2(y'+y^2)=xy-1$.

   — Après division par $x^2$ c'est bien une équation de Riccati sur $\mathrm{I}=]-\infty;0[$ ou $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$.

— $y_0 : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est bien une solution particulière.

— On a $u(x) = y(x) - y_0(x)$ et donc $y = u + \dfrac{1}{x}$. L'équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ devient

$$x^2\left(u' - \frac{1}{x^2} + u^2 + 2\frac{u}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x\left(u + \frac{1}{x}\right) - 1$$

qui se simplifie en

$$x^2\left(u' + u^2 + 2\frac{u}{x}\right) = xu$$

ce qui correspond à l'équation de Bernoulli :

$$u' + \frac{1}{x}u + u^2 = 0.$$

— Si $u$ ne s'annule pas, en divisant par $u^2$, cette équation devient $\dfrac{u'}{u^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{u} + 1 = 0$.

On pose $z(x) = \dfrac{1}{u}$, l'équation devient $-z' + \dfrac{1}{x}z + 1 = 0$.

Ses solutions sur $\mathrm{I}$ sont les $z(x) = \lambda x + x\ln|x|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi $u(x) = \dfrac{1}{z(x)} = \dfrac{1}{\lambda x + x\ln|x|}$ mais il y a aussi la solution nulle $u(x) = 0$.

— Conclusion. Comme $y = u + \dfrac{1}{x}$, on obtient alors des solutions de l'équation de départ sur $]-\infty; 0[$ et $]0\,; +\infty[$ :

$$y(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{ou} \qquad y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\lambda x + x\ln|x|} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

**Exercice 22 :** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)f(-x) = 1. \tag{X.1}$$

**Correction :** Tout d'abord, remarquons que $f$ et $f'$ ne s'annulent jamais sur $\mathbb{R}$. Conséquence, $f' = \dfrac{1}{f(-x)}$, quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas est dérivables puis, par récurrence, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice à astuce où il faut remarquer que $\Big(f(x)f(-x)\Big)' = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x)f(-x) = 1$ et $f'(-x)f(x) = 1$ par symétrie alors $f(x)f(-x)$ dont la dérivée est nulle, est constante sur $\mathbb{R}$, par exemple, à $f(0)^2$ non nul.

En combinant les deux équations, on obtient :

$$f(x)f(-x) = f(0)^2 \ \text{ et } \ f(-x) = \frac{1}{f(x)} \implies f(x) = f(0)^2 f'(x).$$

$f$ est donc de la forme $f_\lambda : x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour un certain $\lambda > 0$.

Équations différentielles (linéaires)

Réciproquement, on vérifie que seule $f_1 : x \longmapsto e^x$ est solution de $(X.1)$.

**Exercice 23 :** On considère l'équation différentielle

$$(L) : \ x^2y'' + 4xy' + (2+x^2)\, y = 0.$$

1. Résoudre l'équation (L) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en posant $u = x^2y$.
2. Existe-t-il des solutions de (L) sur $\mathbb{R}$ ?

**Correction :**

1. Posons $u = x^2y$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction $u$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
u = x^2y &\iff & y &= \frac{u}{x^2} \\
u' = 2xy + x^2y' &\iff & y' &= \frac{u' - 2\dfrac{u}{x}}{x^2} = \frac{xu' - 2u}{x^3} \\
u'' = 2y + 4xy' + x^2y'' &\iff & y'' &= \frac{x^2u'' - 2\dfrac{u}{x^2} - 4\dfrac{u'x - 2u}{x^2}}{x^2} = \frac{x^2u'' - 4xu' + 6u}{x^4} \\
&\iff & x^2y'' + 4xy' + (2+x^2)\, y &= \frac{x^2u'' - 4xu' + 6u + 4xu' - 8u + (2+x^2)u}{x^2} \\
&\iff & 0 &= u'' + u
\end{aligned}$$

Commentaires : *La forme simple de l'équation en $u$ se voyait mais la méthode ci-dessus, marchera dans tous les cas.*

La fonction $u$ est donc solution de d'une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants donc de la forme $u : x \longmapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On trouve alors les solutions de l'équation initiale sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ (les constantes dépendent de ces intervalles) :

$$y : x \longmapsto \frac{\lambda_\pm \cos(x) + \mu_\pm \sin(x)}{x^2}, \quad \lambda_\pm, \mu_\pm \in \mathbb{R}.$$

2. Quelles que soient les constantes $\lambda_\pm$, $\mu_\pm$ non nulles, $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = +\infty$ donc il est impossible de prolonger $y$ en une solution même continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La seule solution sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction nulle (on le vérifiera aisément).

Commentaires : *Si le dénominateur avait été $x$ et non $x^2$, on aurait pu le tenter avec $\lambda_\pm = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ mais pas là et on aurait eu, de toute manière des soucis pour prolonger en une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.*