Techniques d'intégration

1. Calculer $\displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\pi - t}$.

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\pi - t} = \Big[-\ln\left(|\pi - t|\right)\Big]_{2\pi}^{3\pi} = \Big[-\ln(t-\pi)\Big]_{2\pi}^{3\pi} = -\ln(2).$$

2. On considère $f : x \longmapsto \dfrac{x}{(x-1)(x+3)}$

   (a) Sur quel intervalle I, la fonction f admet-elle une primitive ?

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$. D'après le théorème fondamental, elle admet donc une primitive sur tout intervalle I inclus strictement dans $]-\infty\,;-3[\,\cup\,]-3\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

   (b) Donner la décomposition en éléments simples de f sur I.

   La décomposition en éléments simples de f sur I s'écrit :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}.$$

   — Pour $x = 0$, $0 = -a + \dfrac{b}{3}$.

   — $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}\right) = a + b$.

   — a et b sont donc solutions du système $\begin{cases} -3a + b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.

   On trouve $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = \dfrac{3}{4}$.

   La décomposition de f en éléments simples s'écrit donc :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+3}\right).$$

   (c) En déduire une primitive de f sur I.

   D'après les questions précédentes,

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \int^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int^{x}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{3}{t+3}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\ln\left(|(x-1)(x+3)|\,(x+3)^2\right).$$

   (d) Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Sur $[-2\,;0]$, $(x-1)(x+3) < 0$ donc,

$$\int_{-2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\Big[\ln\left((1-x)(x+3)^3\right)\Big]_{-2}^{0} = \frac{1}{4}\left(\ln(27) - \ln(3)\right) = \frac{1}{2}\ln(3).$$

3. On considère $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x^2+1)(x-2)}$.

   (a) Sur quel intervalle I, la fonction f admet-elle une primitive ?

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. D'après le théorème fondamental, elle admet donc une primitive sur tout intervalle I inclus strictement dans $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.

   (b) Donner la décomposition en éléments simples de f sur I.

   La décomposition en éléments simples de f sur I s'écrit :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

   — $a = (x-2)f(x)\Big|_{x=2} = \dfrac{1}{5}$.
   — $a + b = \lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0 \implies b = -\dfrac{1}{5}$.
   — $-\dfrac{1}{2} = f(0) = -\dfrac{a}{2} + c \implies c = -\dfrac{2}{5}$ ou $b\,\mathrm{i} + c = (x^2+1)f(x)\Big|_{x=\mathrm{i}} = \dfrac{1}{\mathrm{i}-2} = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{i} \implies c = -\dfrac{2}{5}$.

   La décomposition de f en éléments simples s'écrit donc :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1}\right).$$

   (c) En déduire une primitive de f sur I.

   D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathrm{I},\ \int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{5}\int^x \left(\frac{\mathrm{d}t}{t-2} - \frac{t+2}{t^2+1}\right).\\ &= \frac{1}{5}\ln\left(|x-2|\right) - \frac{1}{10}\int^x \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{5}\int^x \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{5}\ln\left(|x-2|\right) - \frac{1}{10}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{2}{5}\arctan(x).\end{aligned}$$

Techniques d'intégration

Techniques d'intégration

1. Calculer $\displaystyle\int_{2\,\mathrm{e}}^{3\,\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}-t}$.

$$\int_{2\,\mathrm{e}}^{3\,\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}-t} = \Big[-\ln\left(|\,\mathrm{e}-t|\,\right)\Big]_{2\,\mathrm{e}}^{3\,\mathrm{e}} = \Big[-\ln(t-\mathrm{e})\Big]_{2\,\mathrm{e}}^{3\,\mathrm{e}} = -\ln(2).$$

2. On considère $f : x \longmapsto \dfrac{x}{(x+1)(x-2)}$

(a) Sur quel intervalle I, la fonction f admet-elle une primitive ?

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. D'après le théorème fondamental, elle admet donc une primitive sur tout intervalle I inclus strictement dans $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.

(b) Donner la décomposition en éléments simple de f sur I.

La décomposition en éléments simples de f sur I s'écrit :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}.$$

— Pour $x = 0$, $0 = a - \dfrac{b}{2}$.

— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}\right) = a+b$.

— a et b sont donc solutions du système $\begin{cases} 2a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.

On trouve $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{2}{3}$.

La décomposition de f en éléments simples s'écrit donc :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}\right).$$

(c) En déduire une primitive de f sur I.

D'après les questions précédentes,

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int^x \left(\frac{1}{t+1} + \frac{2}{t-2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln\left(|x+1|\,(x-2)^2\right).$$

(d) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Sur $[0\,;1]$, $x+1 \geqslant 0$ donc,

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\ln\left((x+1)(x-2)^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\ln(2) - \ln(4)\right) = -\frac{1}{3}\ln(2).$$

3. On considère $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}$.

   (a) Sur quel intervalle I, la fonction f admet-elle une primitive ?

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$. D'après le théorème fondamental, elle admet donc une primitive sur tout intervalle I inclus strictement dans $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.

   (b) Donner la décomposition en éléments simple de f sur I.

   La décomposition en éléments simples de f sur I s'écrit :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}.$$

   — $a = (x-1)^2 f(x)\Big|_{x=1} = -1.$
   — $c = (x-2) f(x)\Big|_{x=2} = 1.$
   — $b + c = \lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = 0 \implies b = -1$ ou $-\dfrac{1}{2} = f(0) = a - b - \dfrac{c}{2} \implies b = -1.$

   La décomposition de f en éléments simples s'écrit donc :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

   (c) En déduire une primitive de f sur I.

   D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathrm{I},\ \int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= -\int^x \left(\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t.\\ &= \frac{1}{x-1} - \ln\left(\,|x-1|\,\right) + \ln\left(\,|x-2|\,\right)\\ &= \frac{1}{x-1} + \ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right).\end{aligned}$$

Techniques d'intégration