Chapitre

XIII Matrices

Avant de rentrer dans le vif du sujet en algèbre linéaire (les fameux espaces vectoriels, que nous aborderons au deuxième semestre), un chapitre plus orienté « calcul » sur un outil qui sera fondamental dans la suite du cours : *les matrices*.

CONTENU

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les lettres n, p, q, ...désignent des entiers naturels non nuls.

I/ L'ensemble des matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

I.1 Généralités et vocabulaire

Définition 1 : Soient n et p deux entiers non nuls.

On appelle *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$* toute famille $\mathrm{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, indexée par $[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;p]\!]$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{où } a_{ij}\in\mathbb{K},\ \forall\ (i\,;j)\in[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;p]\!].$$

On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ leur ensemble où n et p sont, réciproquement, le nombre de *lignes* et de *colonnes* et $\mathbb{K}$ est le corps auquel appartiennent les coefficients ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour nous).

- Les nombres a_{ij} sont les *coefficients* de la matrice A.
- a_{ij} est situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

On notera souvent, en abrégé, $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{(i;j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad (n<p)$$

$i^{\text{ème}}$ ligne

Diagonale de la matrice

$j^{\text{ème}}$ colonne

Les coefficients de la forme a_{ii} sont les coefficients de la diagonale de la matrice. Expression qui ne prend vraiment son sens que pour les matrices carrées que nous allons voir.

Exemples 1 :

- $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est une matrice 2×3 réelle.

  Par exemple, $a_{21}=4$ et $a_{13}=0$.

— $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 4 & 1-i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est une matrice 2×2 complexe.

Remarques :

— Une matrice A de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ n'est jamais qu'un élément de $\mathbb{K}^{[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ *i.e.* une famille $(a_{ij})_{(i;j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, *i.e.* encore une application $(i;j) \longmapsto a_{ij}$ de $[\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$ dans $\mathbb{K}$.

En résumé :

$$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} \,(\simeq \mathbb{K}^{n\times p})\,.$$

— De la même manière, afin de faire ressortir l'aspect vectoriel, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ étant uniquement déterminée par la donnée de n éléments de $\mathbb{K}$, on l'assimilera à un vecteur de $\mathbb{K}^n$ *i.e.* on fera l'identification :

$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n.$$

Une matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc entièrement déterminée par la donnée de $n \times p$ scalaires qui la déterminent ce qui implique notamment que :

Théorème 1 :

$$A = 0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \iff \forall\ (i;j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!],\ a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Une matrice est nulle si, et seulement si ses coefficients sont tous nuls.

Assez logiquement, la matrice $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$, notée parfois $(0)_{n,p}$, sera appelée la **matrice nulle**.

Remarque : Pour différencier les vecteurs $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ que sont les matrices colonnes (ou lignes) des coefficients $x_i \in \mathbb{K}$ qui les déterminent, on appelle *scalaire*, tout élément de $\mathbb{K}$.

Exercice 1 : Représenter les matrices suivantes telles que :

1. A est la matrice de $\mathscr{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = i + j$
2. B est la matrice de $\mathscr{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j \equiv 1\ [2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. C est la matrice de $\mathscr{M}_{4}(\mathbb{R})$ telle que $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $D = \left(a^{\min(i,j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
5. $E = (|i-j|)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
6. $F = (\delta_{i+j,n+1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
7. $G = \Big(\operatorname{sh}\,(a_i + a_j)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

CHAPITRE XIII. MATRICES

Correction :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 2 & \dots & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$.

5. $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ 2 & 1 & \ddots & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

6. $F = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$.

7. $G = \begin{pmatrix} \operatorname{sh}(2a_1) & \operatorname{sh}(a_1+a_2) & \operatorname{sh}(a_1+a_3) & \dots & \operatorname{sh}(a_1+a_n) \\ \operatorname{sh}(a_1+a_2) & \operatorname{sh}(2a_2) & \operatorname{sh}(a_2+a_3) & \dots & \operatorname{sh}(a_2+a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \operatorname{sh}(a_1+a_n) & \operatorname{sh}(a_2+a_n) & \operatorname{sh}(a_3+a_n) & \dots & \operatorname{sh}(2a_n) \end{pmatrix}$.

I.2 Zoologie

— Si $n = 1$, la matrice M est appelée matrice ou *vecteur ligne*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

— Si $p = 1$, la matrice M est appelée matrice ou *vecteur colonne*.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

— Si $m = n$, la matrice M est appelée *matrice carrée* d'ordre n. Leur ensemble est simplement noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

— On appelle *matrice unité* ou *identité* d'ordre n, notée I_n, la matrice carrée d'ordre n qui ne possède que des « 1 » sur sa diagonale et des « 0 » ailleurs :

$$I_n = (\delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Vocabulaire : La notation $\delta_{i,j}$ porte le nom de *symbole de Kronecker*.

$$\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

— On appelle *matrice diagonale* d'ordre n la matrice carrée d'ordre n qui ne possède des éléments non nuls que sur sa diagonale : $a_{ij} = 0,\ \forall\, i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{D}_3(\mathbb{K}).$$

On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ leur ensemble.

En particulier, les matrices $\lambda \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, sont appelées *matrices scalaires*

— On appelle *matrice triangulaire* (*resp.* strictement triangulaire) d'ordre n une matrice carrée d'ordre n qui possède un triangle composé uniquement de « 0 » sous la diagonale (*resp.* strictement sous) :

$a_{ij} = 0,\ \forall\, i \leqslant j$ (*resp.* $i < j$) est une matrice triangulaire inférieure (*resp.* strictement inférieure).

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
Matrice triangulaire inférieure	Matrice triangulaire supérieure	Matrice strictement triangulaire (inférieure)
On note $\mathscr{T}_{n,\mathrm{I}}(\mathbb{K})$ leur ensemble	On note $\mathscr{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ leur ensemble	

Remarques :

— Les matrices triangulaires sont des matrices carrées par définition.

— Les matrices diagonales sont exactement les matrices à la fois triangulaires supérieures ET triangulaires inférieures.

— Seule la matrice nulle est à la fois triangulaire supérieure stricte et triangulaire inférieure stricte.

En outre, elles ont des propriétés très sympathiques pour le produit et la somme comme on le verra au paragraphe (II.3) .

II/ Opérations sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Comme précédemment, un nouvelle ensemble créé, il est nécessaire, afin d'en faire quelque chose, de définir les lois qui le régissent. On dit que l'on dote l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'une structure de groupe, d'anneau ou de $\mathbb{K}$-algèbre suivant les cas.

II.1 Addition

Définition 2 (Somme) : Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices de **même** dimension.

La matrice $C = A \underset{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} B$ est la matrice dont les coefficients sont les sommes des coefficients de A et B :

$$C = A \underset{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} B \iff (a_{ij}) \underset{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} (b_{ij}) = (a_{ij} \underset{\mathbb{K}}{+} b_{ij}).$$

Difficile de faire plus simple !

ATTENTION Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions sinon leur addition n'est pas définie.

Exemples 2 :

— $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$.

— $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

— $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Remarque : On peut donc décomposer une matrice carrée en la somme de deux matrices triangulaires.

— La matrice nulle $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ est l'élément neutre de l'addition définie ci-dessus :

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ A + (0) = (0) + A = A.$$

— Tout élément $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède un symétrique pour la loi $+$ appelé *matrice opposée* de A et notée $-A = (-a_{ij})$. La matrice formée des opposés des coefficients de A :

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ A + (-A) = (-A) + A = (0).$$

De même que l'addition dans $\mathbb{K}$, l'addition des matrices vérifient les mêmes lois : associativité, commutativité, élément neutre et opposé.

On dit que l'ensemble $\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +\right)$ est un *groupe commutatif*.

En particulier, d'après le théorème (1), on en déduit :

Proposition 2 :

$$(a_{ij})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;p]\!]}} \underset{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{=} (b_{ij})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;p]\!]}} \iff \forall\,(i\,;j)\in[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;p]\!],\ a_{ij}\underset{\mathbb{K}}{=}b_{ij}.$$

Deux matrices sont égales si, et seulement si elles ont les mêmes dimensions et leurs coefficients sont égaux deux à deux.

II.2 Loi externe

Définition 3 (Multiplication par un scalaire) : Soient $\mathrm{A}=(a_{ij})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

— On définit le produit (externe) de la matrice A par le scalaire λ, noté $\lambda.\mathrm{A}$ ou $\lambda\mathrm{A}$, comme la matrice dont chaque coefficient est multiplié par λ :

$$\lambda \underset{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{.} (a_{ij}) = (\lambda \underset{\mathbb{K}}{\times} a_{ij}).$$

— Plus généralement, pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ la *combinaison linéaire* de A et $\mathrm{B}=(b_{ij})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice, notée $\lambda.\mathrm{A}+\mu.\mathrm{B}$, de coefficients :

$$\lambda \underset{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{.} (a_{ij}) \underset{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} \mu \underset{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{.} (b_{ij}) = \left(\lambda \underset{\mathbb{K}}{\times} a_{ij} \underset{\mathbb{K}}{+} \mu \underset{\mathbb{K}}{\times} b_{ij}\right).$$

Exemple 3 : $2.\begin{pmatrix}1&2&0\\4&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&0\\8&6&-2\end{pmatrix}$

L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc stable par *combinaisons linéaires i.e.*

$$\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \lambda.\mathrm{A}+\mathrm{B}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Comme sa consœur, la loi externe est distributive sur la somme *i.e.*

$$\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \lambda.(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\lambda.\mathrm{A}+\lambda.\mathrm{B}.$$

On dit que l'ensemble $\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K});\,+;\,.\right)$ est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel.*

Exemple 4 : $3\begin{pmatrix}2&1\\0&4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\4&6\end{pmatrix}.$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ le système : $\begin{cases}3\mathrm{X}+4\mathrm{Y}=\begin{pmatrix}5&2\\12&9\end{pmatrix}\\ -2\mathrm{X}+3\mathrm{Y}=\begin{pmatrix}8&-7\\9&-6\end{pmatrix}\end{cases}$

CHAPITRE XIII. MATRICES

Correction : L'ensemble des matrices étant stable par combinaisons linéaires, on applique celles-ci au système :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{r}
3X+4Y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \\
-2X+3Y = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}
\end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{ll}
17X = 3\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} & \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 - 4L_2 \\
15Y = 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} & \qquad L_2 \leftarrow 2L_1 + 3L_3
\end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{l}
17X = \begin{pmatrix} -17 & 34 \\ 0 & 51 \end{pmatrix} \\
17Y = \begin{pmatrix} 34 & -17 \\ 51 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}\right.
\iff \left\{\begin{array}{l}
17X = 17\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
17Y = 17\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{l}
X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Définition 4 (Matrices élémentaires) : Soit $(i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$.

On appelle *matrice élémentaire* (de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$), notée $E_{i,j,n,p}$ ou $E_{i,j}$, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient de position (i,j), égal à 1 :

$$E_{i,j,n,p} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant l\leqslant p}}.$$

$$E_{i,j,n,p} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \\ j \end{array}$$

Figure XIII.1 – Matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 5 : Les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont :

- $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
- et $E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il est assez clair que toute matrice $M \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaires de matrices élémentaires :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} = m_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} m_{ij} E_{i,j}.$$

Plus généralement,

Proposition 3 :

$$\forall A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{ij} E_{i,j}.$$

La proposition (3) nous fera bientôt dire que la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ forme une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée *base canonique*.

II.3 Produit matriciel

C'est là que les choses deviennent intéressantes. Comme je vous l'ai déjà dit, il est rare, voire exceptionnel qu'un objet se comporte bien avec les deux opérations principales. Comme l'addition de deux matrices est simple ...

Définition 5 (Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne) : Le produit d'un vecteur ligne L par un vecteur colonne C de même dimension n est égal au *produit scalaire* des deux vecteurs considérés comme deux vecteurs colonnes.

$$LC = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \vec{L} \cdot \vec{C} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

ATTENTION au sens ! On parle ici du produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne et non du produit d'un vecteur colonne par un vecteur ligne qui viendra plus tard.

Exercice 3 : Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

Correction :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ \vdots \\ n\end{pmatrix} = 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

et

$$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ \vdots \\ n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 2 & 4 & \cdots & 2n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n & 2n & \cdots & n^2\end{pmatrix}.$$

On généralise cette opération à deux matrices quelconques A et B pourvu que le nombre de colonnes de la matrice A correspondent au nombre de lignes de la matrice B.

Définition 6 : Le *produit* de la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par la matrice $B \in \mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ est égal à la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ dont chaque coefficient c_{ij} est égal au produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ligne de la matrice A par la $j^{\text{ème}}$colonne de la matrice B :

$$\forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;m]\!],\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}. = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

En particulier, l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit.

Exemple 6 : $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -1 & 5\\ 7 & -3 & 10\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}.$

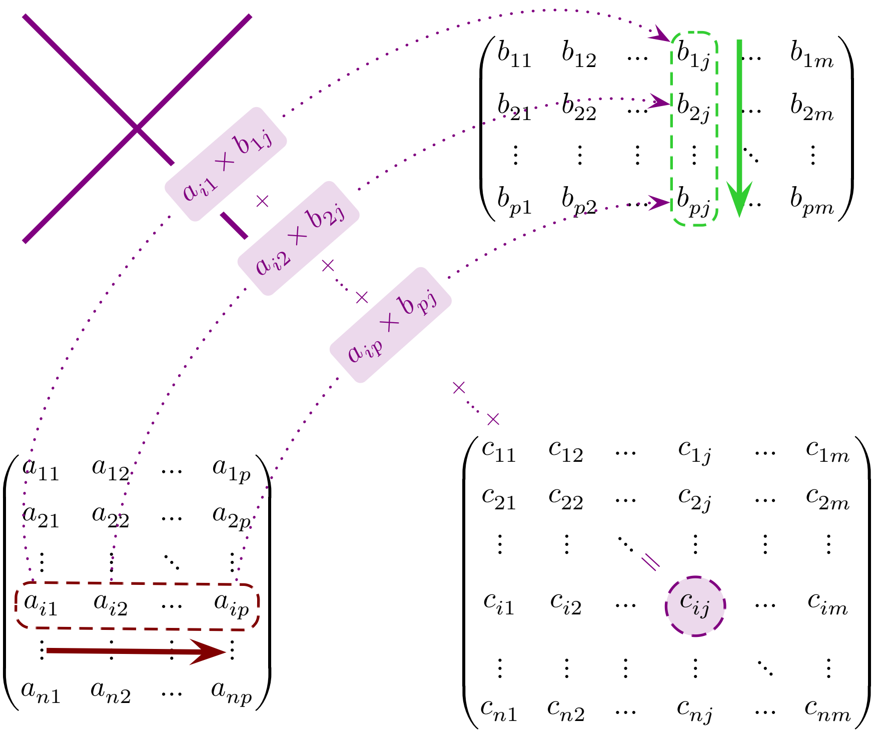

Figure XIII.2 – Produit matriciel

Remarques :

— La matrice de gauche détermine le nombre de lignes tandis que celle de droite, celui des colonnes.

ATTENTION le nombre de colonnes de la matrice de gauche doit être égal au nombre de lignes de la matrice de droite sinon le produit n'est pas défini.

— Le produit à droite d'une matrice par un vecteur colonne est un vecteur colonne et le produit à gauche d'une matrice par un vecteur ligne est un vecteur ligne.

— la complexité de la multiplication matricielle dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est en $\mathrm{O}\left(n^3\right)$ *i.e.* du même ordre de grandeur que λn^3 où λ est une constante strictement positive.

Exercice 4 : Effectuer les sommes et produits **possibles** de matrices entre :

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Correction :

1. $\mathrm{AB} = (-2-3) = (-5) \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}$ et $\mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et BA n'est pas défini.

ATTENTION

Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille.

Mais, même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a, en général, $AB \neq BA$. Les exemples suivants sont à retenir afin d'éviter d'écrire des bourdes.

Exemple 7 ($AB \neq BA$) :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 8 ($AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$) : Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Les matrices A et B sont alors appelées des *diviseurs de zéro*.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un ensemble non intègre.

Exemple 9 ($AB = AC$ n'implique pas $B = C$) : On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Résoudre $AX = B$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

Correction : Par nécessité, $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Posons donc $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Deux matrices étant égales si, et seulement si elles ont les mêmes coefficients, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{AX} = \mathrm{B} &\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} -a & -b \\ 8a+c & 8b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -a & 1 \\ -b & = 2 \\ 8a+c & = 2 \\ 8b+d & = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a & -1 \\ b & = -2 \\ c & = 10 \\ d & = 15. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$.

Exemples 10 (Lignes d'une matrice) : Soient $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $j \in [\![1\,;p]\!]$.

$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{1,n} \times \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jp} \end{pmatrix}_{1,p}$ est la $j^{\text{ème}}$ ligne de A.

à la position j

En particulier, $\mathrm{E}_{i,j,q,n} \times \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0_{1,p} \\ \vdots \\ 0_{1,p} \\ \mathrm{L}_j \\ 0_{1,p} \\ \vdots \\ 0_{1,p} \end{pmatrix}_{q,p}$ en notant $\mathrm{L}_j = \begin{pmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jp} \end{pmatrix}_{1,p}$.

à la position i

Exemples 11 (Colonnes d'une matrice) :

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $j \in [\![1\,;p]\!]$

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{p,1} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}_{n,1} \quad \text{est la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

à la position i

En particulier, $A \times E_{i,j,p,q} = \begin{pmatrix} 0_{n,1} & \cdots & 0_{n,1} & C_i & 0_{n,1} & \cdots & 0_{n,1} \end{pmatrix}_{n,q}$ en notant $C_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}_{n,1}$.

à la position j

Exercice 6 : Calculer $E_{i,j,n,p} \times E_{k,l,p,n}$.

Correction : Par définition du produit matriciel $E_{i,j,n,p} \times E_{k,l,p,n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Posons $E_{i,j,n,p} \times E_{k,l,p,n} = (e_{p,q})_{p,q \in [\![1;n]\!]}$.

Soient $p, q \in [\![1\,;n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} e_{p,q} &= \sum_{m=1}^{n} (E_{i,j,n,p})_{p,m} (E_{k,l,p,n})_{m,q} \\ &= \sum_{m=1}^{n} \delta_{i,p}\delta_{j,m}\delta_{k,m}\delta_{l,q} \\ &= \begin{cases} \delta_{i,p}\delta_{l,q} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \text{ et } p = i \text{ et } q = l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement,

$$E_{i,j,n,p} \times E_{k,l,p,n} = \begin{cases} E_{i,l,n,n} & \text{si } j = k \\ (0)_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus généralement, on a :

Proposition 4 (Produit d'une matrice par un vecteur colonne) :
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont notées A_1, ..., A_p.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ on a :

$$AX = \sum_{k=1}^{p} x_k A_k \in \mathbb{K}^n.$$

Autrement dit, le produit d'une matrice A par un vecteur colonne est une combinaison linéaire des colonnes de A.

En particulier, le produit à droite d'une matrice $n \times p$ par un vecteur colonne $p \times 1$ est un vecteur colonne $n \times 1$.

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{np}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{1k}x_k \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{nk}x_k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} x_k A_k.$$

Figure XIII.3 – Produit (à droite) d'une matrice par un vecteur colonne.

Preuve : Tout d'abord, remarquons que le produit AX d'une matrice à n lignes par un vecteur de $\mathbb{K}^p$ est un vecteur colonne à n lignes donc un élément de $\mathbb{K}^n$.

Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $(AX)_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (A_k)_i x_k = \sum_{k=1}^{p} x_k (A_k)_i = \sum_{k=1}^{p} (x_k A_k)_i = \left(\sum_{k=1}^{p} x_k A_k \right)_i$.

Vous verrez par la suite que nombre de ces difficultés n'existeraient pas si l'inverse d'une matrice non nulle pouvait toujours être défini. La raison principale étant la non commutativité du produit matriciel.

Alors que reste-t-il au final ? Ce qui est indiqué dans la proposition et seulement cela :

Proposition 5 (Propriétés algébriques de la multiplication) :
Lorsque celui-ci est possible, le produit de deux matrices est :
Associatif : $A(BC) = (AB)C = ABC$.
Bilinéaire : $A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC$ et $(\lambda B + C)A = \lambda BA + CA$.
Non commutatif : $AB \neq BA$ en général.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Élément neutre : $AI_p = I_nA = A$.

I_p est *élément neutre* pour la multiplication à droite et I_n pour la multiplication à gauche.

Élément absorbant : $(0)_{m,n}A = (0)_{m,p}$ et $A(0)_{p,q} = (0)_{n,q}$, $\forall\, m, q \in \mathbb{N}^*$.

On dit que la matrice nulle est un *élément absorbant* pour le produit matriciel.

Exercice 7 : Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

Correction : Soit $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
AB = BA &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ az & at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bx+ay \\ az & bz+at \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} ax+bz &= ax \\ ay+bt &= bx+ay \\ at &= bz+at \end{cases} \iff \begin{cases} bz &= 0 \\ bt &= bx \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z &= 0 \\ t &= x \end{cases} \quad \text{car } b \neq 0.
\end{aligned}$$

Les matrices qui commutent avec A sont donc des matrices de la même forme *i.e.* $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

Remarque : Si $b = 0$ alors A est diagonale et toutes les matrices commutent avec elle.

II.4 Transposition d'une matrice

Définition 7 : La *transposée* d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $A^\top$ ou anciennement ${}^tA$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A.

$$A^\top = (a_{ji}) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

Exemple 12 : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ alors $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque : La transposée d'un vecteur colonne est un vecteur ligne et réciproquement :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Proposition 6 (Propriété de la transposition) :
Linéarité : Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top$.

Involutivité : Pour tous $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$.

Contravariance : Pour tous $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Preuve : Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;r]\!] \times [\![1\,;p]\!]$,

$$\begin{aligned}\left((\lambda A + B)^\top\right)_{ij} &= (\lambda A + B)_{ji} && \text{(définition de la transposition)}\\ &= \lambda a_{ji} + a_{ji} && \text{(d'après les lois de } \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}))\\ &= \lambda (A^\top)_{ij} + (B^\top)_{ij} && \text{(définition de la transposition)}\end{aligned}$$

Donc, $(\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top$.

— $\forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;r]\!] \times [\![1\,;p]\!]$,

$$\begin{aligned}\left((A^\top)^\top\right)_{ij} &= (A^\top)_{ji} && \text{(définition de la transposition)}\\ &= a_{ij} && \text{(définition de la transposition)}\end{aligned}$$

Donc, $(A^\top)^\top = A$.

— $\forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;r]\!] \times [\![1\,;p]\!]$,

$$\begin{aligned}\left((AB)^\top\right)_{ij} &= (AB)_{ji} && \text{(définition de la transposition)}\\ &= \sum_{k=1}^{q} a_{jk} b_{ki} && \text{(définition du produit matriciel)}\\ &= \sum_{k=1}^{q} b_{ki} a_{jk} && \text{(commutativité de } \mathbb{K})\\ &= \sum_{k=1}^{q} (B^\top)_{ik} (A^\top)_{kj} && \text{(définition de la transposition)}\\ &= (B^\top A^\top)_{ij}. && \text{(définition du produit matriciel)}\end{aligned}$$

Donc, $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Remarques :

— Soient $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Alors leur produit scalaire $\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y}$ peut-être vu comme un produit matriciel :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y} = XY^\top &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.\end{aligned}$$

— De la même manière, soient $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ où $\forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, $A_i \in \mathbb{K}^p$ est la $i^{\text{ème}}$ligne de A et $B_j \in \mathbb{K}^p$ est la $j^{\text{ème}}$colonne de B.

Alors $(AB)_{ij} = \overrightarrow{A_i}.\overrightarrow{B_j}^\top$ où A_i et B_j sont vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^p$.

Définition 8 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

— On dit que A est *symétrique* si, et seulement si $A^\top = A$ autrement dit :

$$\forall\, i, j \in [\![1\,;n]\!]\,,\ a_{ij} = a_{ji}.$$

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

— On dit que A est *anti-symétrique* si, et seulement si $A^\top = -A$ autrement dit :

$$\forall\, i, \in [\![1\,;n]\!]\,,\ a_{ij} = -a_{ji}.$$

On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarques :

— Les matrices symétriques sont donc les invariants de la transposition.

— En particulier, les coefficients de la diagonale d'une matrice anti-symétriques sont nécessairement nuls.

— De plus, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \left\{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\right\}$.

Exemples 13 : $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 8 : Soit A une matrice carrée à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que $A^\top A$ est symétrique.
2. Démontrer que A^2 est symétrique si A est symétrique ou antisymétrique.

Correction :

1. $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$ donc $A^\top A$ est symétrique.
2. $(A^2)^\top = A^\top A^\top$.

   Si A est symétrique alors $A^\top A^\top = AA = A^2$ donc A^2 est symétrique.

   De même, si A est antisymétrique, $A^\top A^\top = (-A)(-A) = A^2$ donc A^2 est symétrique.

   Dans les deux cas, A^2 est symétrique.

III/ L'algèbre des matrices carrées $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Revenons sur la proposition (5) spécifiquement dans le cas où $n = p$ des matrices carrées.

D'après celle-ci, le produit de deux matrices carrées d'ordre n est encore une matrice carrée d'ordre n, ce qui fait de la multiplication matricielle une opération appelée *loi interne* sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associative, distributive, admettant la matrice $\mathbf{I}_n$ comme élément neutre, mais pas commutative.

On dit que l'ensemble $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un *anneau* unitaire d'unité la matrice I_n et que l'ensemble $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative.

On étudie dans ce paragraphe spécifiquement les matrices carrées.

III.1 Matrices diagonales et triangulaires

Proposition 7 (Produits et combinaisons linéaires de matrices diagonales) :

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit matriciel.

- $\forall\, A, B \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\quad \lambda A + B \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$

- $\forall\, A, B \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}),\quad AB \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}.$$

Remarque : Pour économiser de la place on trouve souvent l'écriture $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$ abrégée en $D = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Tout le monde comprendra...

CHAPITRE XIII. MATRICES

Exercice 9 : Déterminer $\left\{\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, \forall\, \mathrm{D} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}), \mathrm{AD} = \mathrm{DA}\right\}$.

Correction : Toute l'idée de cet exercice est que A doit commuter avec TOUTES les matrices diagonales. On va donc pouvoir particulariser :

Posons $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ et soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]}$.

Pour tout $i, j \in [\![1\,;n]\!]$, on a :

$$(\mathrm{DA})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}_{i,k} a_{k,j} = d_i a_{i,j} \quad \text{et} \quad (\mathrm{AD})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \mathrm{D}_{k,j} = d_j a_{i,j}.$$

L'égalité $(\mathrm{DA})_{i,j} = (\mathrm{AD})_{i,j}$ pour tout i, j entraîne que si $d_i \neq d_j$ alors $a_{i,j} = 0$.

La matrice A est donc nécessairement diagonale. Réciproquement, on sait que les matrices diagonales commutent.

L'ensemble cherché est donc $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

Ces résultats se généralisent aux matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) comme l'énonce la propriété suivante :

Proposition 8 (Produits et combinaisons linéaires de matrices triangulaires) :
$\mathrm{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit matriciel.

— $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K}), \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda\mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathscr{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$.
— $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{AB} \in \mathscr{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & b_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22}b_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

En particulier, les termes diagonaux du produit sont les produits des termes diagonaux *i.e.*

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ (\mathrm{AB})_{ii} = a_{ii}b_{ii}.$$

Les résultats sont similaires pour les matrices triangulaires inférieures. [1]

Preuve : Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures.

Soient $i,\ j \in [\![1\,;n]\!]$ tels que $i > j$.

Par hypothèse, on a $a_{ij} = b_{ij} = 0$.

De plus,

[1]. Le cas inférieur s'en déduit par transposition.

— $\forall\,\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A + B)_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij} = 0$.

Donc $\lambda A + B$ est triangulaire supérieure.

— $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{\substack{=0 \\ \text{car } i>k}} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{\substack{=0 \\ \text{car } k \geqslant i > j}} = 0.$

Donc AB est triangulaire supérieure.

En particulier, $(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{\substack{=0 \\ \text{car } i>k}} b_{ki} + a_{ii}b_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \underbrace{b_{ki}}_{\substack{=0 \\ \text{car } k>i}} = a_{ii}b_{ii}$.

III.2 Puissance d'une matrice carrée et binôme de Newton

Définition 9 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ *la puissance $k^{\text{ème}}$* de A par récurrence :

$$A^0 = I_n$$
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} = AA^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k+1 \text{ fois}}.$$

Remarques :

— On ne peut définir de puissance $k^{\text{ème}}$ que pour des matrices carrées.

— Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, on a $A^kA^l = A^lA^k = A^{k+l}$.

— Cependant, en général, pour A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $(AB)^2 \neq A^2B^2$. On peut seulement affirmer que $(AB)^2 = ABAB$.

Exemple 14 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$
$$A^3 = A \times (A \times A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 : Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer N^n et A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction : Après calculs, on trouve $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\forall\, k \geqslant 3,\ N^k = (0)_3$.

En remarquant que $A = N + I_3$ et que les matrices N et I_3 commutent, on utilise le binôme de Newton pour écrire :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \geqslant 2,\ A^n &= (N + I_3)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \\
&= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & 2n + \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+3)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Corollaire 8.1 :
Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\Big(diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\Big)^p = diag(\alpha_1^p, \dots, \alpha_n^p).$$

et

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\quad \begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22}^p & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^p \end{pmatrix}.$$

Exemple 15 : $\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} \pi^7 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Théorème 9 :
Soient A et B deux matrices carrées de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, si $AB = BA$ alors :

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k} \qquad \text{(Binôme de Newton)}.$$

$$A^p - B^p = (A - B)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\right)(A - B).$$

$$\text{(Factorisation de } A^p - B^p\text{)}.$$

ATTENTION

Si A et B ne commutent pas *i.e.* $AB \neq BA$ alors

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2+2AB+B^2! \ \ldots\end{aligned}$$

Et,

$$(A+B)(A-B) = A^2-AB+BA-B^2 \neq A^2-B^2! \ldots$$

Preuve : Montrons ce résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

— Pour $p=0$, il y a juste à constater que $I_n = I_n$.

— Supposons le résultat vérifié pour un certains $m \in \mathbb{N}^*$ *i.e.*

$$\left(A+B\right)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^k \times B^{m-k}.$$

Alors : $$\left(A+B\right)^{m+1} = \left(A+B\right)^m\left(A+B\right) = \left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^k\times B^{m-k}\right)\left(A+B\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^k\times B^{m-k}A + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^k\times B^{m-k+1}$$

Comme A et B commutent, $A^k \times B^{m-k}A = A^{k+1}\times B^{m-k}$

$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^{k+1}\times B^{m-k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^k\times B^{m-k+1}$$
$$= A^{m+1} + \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}A^{k+1}\times B^{m-k} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}A^k\times B^{m-k+1} + B^{m+1}$$

En effectuant un changement d'indice dans la première somme,

$$= A^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}A^k\times B^{m-k+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}A^k\times B^{m-k+1} + B^{m+1}$$

On factorise :

$$= A^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\underbrace{\left[\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}\right]}_{\binom{m+1}{k}}A^k\times B^{m-k+1} + B^{m+1}$$

La formule de Pascal permet de conclure :

$$= \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}A^k\times B^{(m+1)-k}.$$

La propriété est héréditaire.

— La propriété est donc vraie pour $p=0$ et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

CHAPITRE XIII. MATRICES

Exemple 16 : Comme toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec I_n, on a :

$$(A + I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k = A^p + pA^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} A^{p-2} + \cdots + pA + \mathbf{I}_n.$$

$$I_n - A^p = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k = (I_n - A)\left(A^{p-1} + A^{p-2} + \ldots + A + I_n\right).$$

Ce théorème est particulièrement intéressant dans le cas des matrices dites, *nilpotentes* :

Définition 10 (Matrice nilpotente) : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est *nilpotente* si $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

Le plus petit entier p pour laquelle cette identité est vraie est appelé l'*indice de nilpotence* de A :

$$p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, A^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\right\}.$$

Par définition de l'indice de nilpotence, pour tout matrice N nilpotente d'indice p,

$$\forall\, k < p,\ N^k \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})} \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant p,\ N^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Exemple 17 : La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 3.

Exercice 11 : Déterminer toutes les matrices carrées d'ordre n qui sont à la fois nilpotentes et idempotentes (*i.e.* $A^2 = A$).

Correction : Soit A une matrice nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 2$.

On a $A^p = 0$ et $A^p = A$ donc, $A = 0$.

La matrice nulle étant clairement idempotente et nilpotente, l'ensemble des matrices nilpotentes et idempotentes ne contient que la matrice nulle.

Méthode 1 (Calcul de la puissance d'une matrice) :
Dans les cas où A peut de décomposer comme la somme de deux matrices qui **commutent**, on pourra utiliser la formule du binôme de Newton.

En particulier, si $A = \lambda I_n + N$ où N est une matrice nilpotente.

Exercice 12 : Soients $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^n, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En écrivant $A = I_3 + J$, calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Correction : Comme $J^3 = 0$, on a :

$$A^n = (J + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$

IV/ Matrices inversibles et $\mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$

Définition 11 (Inverse d'une matrice) : Une matrice carrée A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *inversible* (ou régulière) si, et seulement si il existe une matrice carrée B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Si A n'est pas inversible, on dit que la matrice A est *singulière*.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé le *groupe linéaire* d'ordre n sur $\mathbb{K}$. On le note $\mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$.

ATTENTION | Par définition, une matrice inversible est nécessairement carrée !

Exemples 18 :

— Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

— $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{G}l_2(\mathbb{K})$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarques : Une matrice B telle que $AB = I_n$ s'appelle un *inverse à droite* de A. Une matrice B′ telle que $B'A = I_n$ s'appelle un *inverse à gauche* de A.

S'ils existent, un inverse à droite et un inverse à gauche sont nécessairement égaux.

Preuve : À partir de $AB = I_n$, il suffit de multiplier à gauche les deux membres par B' pour obtenir $(B'A)B = B' \iff B = B'$.

Il suffira donc de trouver indifféremment un inverse à gauche ou à droite pour conclure à l'inversibilité de la matrice considérée.

Proposition 10 :
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A est inversible alors sa matrice inverse est unique. On la note A^{-1}.

Preuve : Soit A une matrice carré inversible et soient B et B' deux inverses de A.

$$B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B'.$$

Remarque :

— On retrouve la définition de l'inverse d'un réel x non nul *i.e.* le nombre $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ tel que $x \times \dfrac{1}{x} = 1$. La matrice unité I_n joue ici le rôle du 1 dans $\mathbb{R}$.

— C'est un fait général pour tout monoïde associatif.

Exemples 19 :

— La matrice I_n est inversible avec $I_n^{-1} = I_n$.

— La matrice nulle $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ n'est pas inversible.

— $A \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K}) \iff \forall \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \lambda A \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$ et, dans ce cas, $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.

— Une matrice nilpotente n'est pas inversible.

Exemple 20 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{G}l_2(\mathbb{K})$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ATTENTION

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, à la différence de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe des matrices non nulles comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas inversibles.

Exercice 13 : Montrer que toute matrice carrée qui possède une ligne ou une colonne nulle N'est PAS inversible.

Correction : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et supposons, par exemple, que A possède une colonne nulle, disons la $i^{\text{ème}}$.

Alors pour tout $\mathrm{B} \in \mathbb{K}^n$, le produit BA possède lui aussi une $j^{\text{ème}}$ colonne nulle, donc ne peut jamais être égal à I_n

Exemple 21 : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 4 & 0 \\ 2+\mathrm{i} & 5\mathrm{i} & 0 \\ 3-\mathrm{i} & 6 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathscr{G}l_3(\mathbb{C})$.

Exercice 14 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A}$.
2. En déduire que $\mathrm{A} \in \mathscr{G}l_3(\mathbb{K})$ et calculer A^{-1}.

Correction :

1. Après calculs, on trouve $\mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A} = -6\mathrm{I}_3$.
2. En factoriant par A à droite et à gauche d'ans l'expression ci-dessus, on obtient :

$$\mathrm{A}\left(-\frac{1}{6}\cdot(\mathrm{A}-5\mathrm{I}_3)\right) = \left(-\frac{1}{6}\cdot(\mathrm{A}-5\mathrm{I}_3)\right)\mathrm{A} = \mathrm{I}_3.$$

La matrice A est donc inversible d'inverse $\mathrm{A}^{-1} = -\frac{1}{6}\cdot(\mathrm{A}-5\mathrm{I}_3) = -\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Remarque : Le polynôme $\mathrm{P(X)} = \mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 6$ est appelé *polynôme annulateur* de la matrice A. Une matrice donnée, l'existence d'un polynôme annulateur de valuation nulle (*i.e.* le monôme de plus bas degré est une constante) assure qu'elle soit inversible :

S'il existe $\mathrm{P} = a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \ldots + a_1\mathrm{X} + a_0$ avec $a_0 \neq 0$ tel que $\mathrm{P(A)} = 0_{\mathscr{M}_n}$ alors A est inversible et

$$\mathrm{A}^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(a_n\mathrm{A}^{n-1} + a_{n-1}\mathrm{A}^{n-2} + \ldots + a_1\mathrm{I}\right).$$

Méthode 2 (Inverser une matrice avec un polynôme annulateur) :
Soit A une matrice et P un polynôme annulateur de A dont le terme constant est non nul. Alors,

- A est inversible,
- On trouve l'expression de A^{-1} à partir de l'expression $\mathrm{P(A)} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ en isolant le multiple de I_n et en factorisant par A.

Théorème 11 (Opérations sur les matrices inversibles) :
Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$.

Involutivité : A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
Produit : AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Puissance : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
Transposition : $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

On retiendra donc que $\mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$ est stable par inverse et produit : $\left(\mathscr{G}l_n(\mathbb{K}), \times\right)$ est, comme son nom l'indique, un groupe (non commutatif).

ATTENTION

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.
Rappelez vous que la multiplication dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutative :
$(A^{-1}B^{-1})(AB)$ ne donne rien.

Preuve : Soient $A, B \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$.

- $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$, donc par définition de l'inversibilité, A^{-1} est inversible d'inverse A.
- $AB \times B^{-1}A^{-1} = A \times BB^{-1} \times A^{-1} = A \times I_n \times A^{-1} = AA^{-1} = I_n$ et $B^{-1}A^{-1} \times AB = I_n$, donc AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.
- Par récurrence à partir de l'assertion précédente.
- $(A^{-1})^\top A^\top = (AA^{-1})^\top = {I_n}^\top = I_n$ et $A^\top (A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = {I_n}^\top = I_n$.

  Donc $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

ATTENTION A et B inversible $\cancel{\Longrightarrow}$ A + B inversible.

IV.1 Inversibilité des matrices d'ordre 2

Pour les matrices carrées de taille 2, il est facile de trouver une condition nécessaire et suffisante simple d'inversibilité ainsi qu'une formule pour le calcul de l'inverse le cas échéant. Nous verrons plus tard dans l'année qu'une généralisation de ces résultats est possible pour les matrices carrées de taille quelconque, mais au prix d'un travail important...

Définition 12 (Déterminant d'une matrice) : Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre 2, on appelle *déterminant* de la matrice A, noté $\det(A)$, le scalaire tel que :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple 22 : Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 2 \times 3 = -2$.

Théorème 12 (Inverse d'une matrice d'ordre 2) :
Une matrice carrée d'ordre deux est inversible si, et seulement si son déterminant est différent de 0.

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}),\ \mathrm{A}^{-1} \text{ existe } \iff \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

On a alors :

$$\text{Si } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{XIII.1}$$

Preuve : Comme la dimension de la matrice est petite, on peut le faire à la main et chercher une matrice $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B}\,(= \mathrm{B} \times \mathrm{A}) = \mathrm{I}_2.$$

Quatre inconnues à trouver, cherchons quatre équations à résoudre...

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{I}_2 &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} ax+bz = 1 \\ cx+dz = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ay+bt = 0 \\ cy+dt = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ces deux systèmes n'ont des solutions que si les vecteurs directeurs des droites qu'ils représentent ne sont pas colinéaires *i.e.*

$$ad - bc \neq 0 \iff \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \iff \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

Cette condition vérifiée, des combinaisons linéaires élémentaires donnent les solutions :

$$x = \frac{d}{ad-bc}, \qquad z = \frac{-c}{ad-bc}, \qquad y = \frac{-b}{ad-bc} \quad et \quad t = \frac{a}{ad-bc}.$$

On obtient alors la matrice B, inverse de A : $\mathrm{B} = \dfrac{1}{\det(\mathrm{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Réciproquement, il ne reste plus qu'à vérifier que $\mathrm{B} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_2$. C'est le cas. !

Exemple 23 : Déterminer la matrice inverse de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. On calcule : $\det(\mathrm{A}) = 4 \times 1 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$ donc la matrice A est inversible.

CHAPITRE XIII. MATRICES

2. La condition d'inversibilité remplie, on applique la formule (XIII.1) :

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 :

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$. On pose $D = P^{-1}MP$.

   Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $M^k = PD^kP^{-1}$.
2. Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.
3. Calculer M^k, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Correction :

1. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ et par associativité du produit matriciel.
2. Comme $\det(P) = 3 \neq 0$, $P \in \mathscr{G}l_2(\mathbb{K})$ et $P^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Après calculs, on trouve $D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{D}_2(\mathbb{K})$.
3. D'après la question (1), on a :

$$\begin{aligned}\forall\, k \in \mathbb{N},\ M^k &= PD^kP^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} (-2)^k + 2 & -(-2)^k + 1 \\ -2\left((-2)^k + 1\right) & (-2)^{k+1} + 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Méthode 3 (Calcul de la puissance d'une matrice) :

- Si D est diagonale avec $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alors

$$D^k = \mathrm{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k).$$

- Si A est *semblable* à une matrice diagonale *i.e.* $\exists\, P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$, alors :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}.$$

CHAPITRE XIII. MATRICES

IV.2 Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires

Théorème 13 (Matrice diagonale) :
Soient α_1, ..., α_n, $\beta_1 \in \mathbb{K}$.

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\alpha_i \neq 0$ et alors :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Preuve : Pas trop dur avec la proposition (7) .

L'inversibilité des matrices diagonales était facile à étudier. Qu'en est-il, plus généralement, des matrices triangulaires ?

Théorème 14 (Matrice triangulaire) :
Une matrice triangulaire A est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.

Dans ce cas, A^{-1} est aussi triangulaire de même type et ses coefficients diagonaux sont exactement les inverses des coefficients diagonaux de A.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22}^{-1} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Preuve : On se contente de considérer des matrices triangulaires supérieures , le cas inférieur s'en déduit par transposition.

La preuve se fait par récurrence sur la taille n des matrices concernées.

— Toute matrice triangulaire supérieure de taille 1 est de la forme (a) pour un certain $a \in \mathbb{K}$, donc est inversible si, et seulement si $a \neq 0$, et dans ce cas comme voulu :

$$(a)^{-1} = (a^{-1}).$$

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'équivalence vraie pour les matrices triangulaires supérieures de taille n.

CHAPITRE XIII. MATRICES

Soit $\mathcal{A} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure *i.e.* $\mathcal{A}$ s'écrit, par blocs :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \mathrm{C} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ (0) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K}) & d \end{pmatrix}.$$

— Si $\mathcal{A}$ est inversible alors il existe une matrice

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \mathrm{C}' \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \mathrm{B}' \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K}) & d' \end{pmatrix},$$

telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathrm{I}_{n+1} &\iff \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A}' & \mathrm{C}' \\ \mathrm{B}' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \mathrm{AA}' + \mathrm{CB}' & \mathrm{AC}' + \mathrm{C}d' \\ d\mathrm{B}' & dd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}$ est inversible si

$$\begin{cases} dd' = 1 \implies d \neq 0 \text{ et, en particulier } d' = \dfrac{1}{d}. \\ d\mathrm{B}' = 0_{1,n} \implies \mathrm{B}' = 0_{1,n} \text{ car } d \neq 0. \\ \mathrm{AA}' + \underbrace{\mathrm{CB}'}_{\mathrm{B}'=0_{1,n}} = \mathrm{I}_n \iff \mathrm{AA}' = \mathrm{I}_n \implies \mathrm{A} \text{ est inversible.} \end{cases}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, les coefficients diagonaux de A sont donc tous non nuls donc, avec $d \neq 0$, ceux de $\mathcal{A}$ aussi et la première implication est héréditaire.

— Réciproquement, si $\mathcal{A}$ a ses coefficients diagonaux non nuls alors $d \neq 0$ et A est inversible d'après l'hypothèse de récurrence. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \begin{pmatrix} \mathrm{A}^{-1} & -\frac{1}{d}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{C} \\ 0_{1,n} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathrm{AA}^{-1} & -\frac{1}{d}\mathrm{AA}^{-1}\mathrm{C} + \frac{1}{d}\mathrm{C} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_{n+1}. \end{aligned}$$

On vérifie, de même, que $\begin{pmatrix} \mathrm{A}^{-1} & -\frac{1}{d}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{C} \\ 0_{1,n} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \mathcal{A} = \mathrm{I}_{n+1}$ *i.e.* $\mathcal{A}$ est inversible et l'implication est prouvée.

En conclusion, on a prouvé que la propriété était héréditaire. Initialisée, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

IV.3 Trace d'une matrice

La notion de trace vous paraîtra un peu anecdotique pour le moment mais elle est très importante, alors autant l'introduire tout de suite.

Définition 13 (Trace d'une matrice carrée) : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle *trace* de A et on note $\operatorname{tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux de A :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemples 24 :

- $\operatorname{tr}(I_n) = n$.
- Si $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 14 \\ 5 & 9 & 13 \end{pmatrix}$ alors $\operatorname{tr}(A) = -4 - 1 + 13 = 8$.
- Si $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Proposition 15 (Propriété de la trace) :

Linéarité : Pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.
Produit : Pour tous $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Preuve :
Linéarité : Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, A et B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\lambda A + B) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda A + B)_{ii} && \text{(d'après la définition de tr)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii} + b_{ii}) && \text{(d'après les lois de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\text{)} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} && \text{(par linéarité de la somme)} \\
&= \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B).
\end{aligned}$$

La trace est donc une application linéaire.
Produit : Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{p} (BA)_{kk} = \operatorname{tr}(BA).$$

Remarque : La matrice carrée AB est de taille n tandis que BA est de taille p. Elles ont pourtant la même trace.

CHAPITRE XIII. MATRICES

Remarques :

— Lorsque qu'une matrice A est *semblable* à une matrice B *i.e.* il existe une matrice P inversible, dite de *passage*, telle que $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$, on a alors :

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}) = \mathrm{tr}\,\big((\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P})\mathrm{B}\big) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{B})\,.$$

On dit, pour cela, que la trace est un *invariant de similitude*.

— C'est ce résultat qui motive la définition (11) seulement sur les matrices carrées.

En effet, soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice rectangulaire. Si rien n'empêche, en théorie, de définir un inverse $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de A à partir des relations $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_p$, on aurait cependant un petit soucis car :

$$n = \mathrm{tr}\,(\mathrm{I}_n) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{BA}) = \mathrm{tr}\,\big(\mathrm{I}_p\big) = p.$$

Exemple 25 : L'équation matricielle $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$ d'inconnue $(\mathrm{A}\,;\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ n'a pas de solution car pour toutes matrices A, B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{AB} - \mathrm{BA}) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{AB}) - \mathrm{tr}\,(\mathrm{BA}) = 0 \neq n = \mathrm{tr}\,(\mathrm{I}_n)\,.$$