Matrices

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 13

Sommaire I

Avant de rentrer dans le vif du sujet en algèbre linéaire (les fameux espaces vectoriels, que nous aborderons au deuxième semestre), un chapitre plus orienté « calcul » sur un outil qui sera fondamental dans la suite du cours : les matrices.

Avant de rentrer dans le vif du sujet en algèbre linéaire (les fameux espaces vectoriels, que nous aborderons au deuxième semestre), un chapitre plus orienté « calcul » sur un outil qui sera fondamental dans la suite du cours : les matrices.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et les lettres n, p, q, ...désignent des entiers naturels non nuls.

Définition 1 :

Soient n et p deux entiers non nuls.

On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute famille $\mathrm{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, indexée par $[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{où } a_{ij} \in \mathbb{K},\ \forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!].$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ leur ensemble où n et p sont, réciproquement, le nombre de lignes et de colonnes et $\mathbb{K}$ est le corps auquel appartiennent les coefficients ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour nous).

Définition 1 :

Soient n et p deux entiers non nuls.

On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute famille $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, indexée par $[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{où } a_{ij} \in \mathbb{K},\ \forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!].$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ leur ensemble.

- Les nombres a_{ij} sont les coefficients de la matrice A.
- a_{ij} est situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

On notera souvent, en abrégé, $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad (n < p)$$

On notera souvent, en abrégé, $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad (n < p)$$

$i^{\text{ème}}$ ligne

On notera souvent, en abrégé, $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad (n < p)$$

$i^{\text{ème}}$ ligne

$j^{\text{ème}}$ colonne

On notera souvent, en abrégé, $A = (a_{i,j})_{(i;j)\in I\times J}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad (n < p)$$

$i^{\text{ème}}$ ligne

Diagonale de la matrice

$j^{\text{ème}}$ colonne

On notera souvent, en abrégé, $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{(i;j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad (n < p)$$

$i^{\text{ème}}$ ligne

Diagonale de la matrice

$j^{\text{ème}}$ colonne

Les coefficients de la forme a_{ii} sont les coefficients de la diagonale de la matrice. Expression qui ne prend vraiment son sens que pour les matrices carrées que nous allons voir.

Exemples 1 :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est une matrice 2×3 réelle.

  Par exemple, $a_{21} = 4$ et $a_{13} = 0$.

Exemples 1 :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est une matrice 2×3 réelle.

  Par exemple, $a_{21} = 4$ et $a_{13} = 0$.

- $A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 4 & 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est une matrice 2×2 complexe.

Remarques :

- Une matrice A de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ n'est jamais qu'un élément de $\mathbb{K}^{[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;p]\!]}$ *i.e.* une famille $(a_{ij})_{(i;j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, *i.e.* encore une application $(i\,;j) \longmapsto a_{ij}$ de $[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$ dans $\mathbb{K}$.
  En résumé :
  $$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} \left(\simeq \mathbb{K}^{n\times p}\right).$$

Remarques :

- Une matrice A de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ n'est jamais qu'un élément de $\mathbb{K}^{[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ *i.e.* une famille $(a_{ij})_{(i;j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, *i.e.* encore une application $(i\,;j) \longmapsto a_{ij}$ de $[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$ dans $\mathbb{K}$.
  En résumé :
  $$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} \left(\simeq \mathbb{K}^{n\times p}\right).$$
- De la même manière, afin de faire ressortir l'aspect vectoriel, toute matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ étant uniquement déterminée par la donnée de n éléments de $\mathbb{K}$, on l'assimilera à un vecteur de $\mathbb{K}^n$ *i.e.* on fera l'identification :
  $$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n.$$

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc entièrement déterminée par la donnée de $n \times p$ scalaires qui la déterminent ce qui implique notamment que :

Théorème 1 :

$$\mathrm{A} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \iff \forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!],\ a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Une matrice est nulle si, et seulement si ses coefficients sont tous nuls.

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc entièrement déterminée par la donnée de $n \times p$ scalaires qui la déterminent ce qui implique notamment que :

Théorème 1 :

$$\mathrm{A} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \iff \forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!],\ a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Une matrice est nulle si, et seulement si ses coefficients sont tous nuls.

Assez logiquement, la matrice $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$, notée parfois $(0)_{n,p}$, sera appelée la **matrice nulle**.

I. L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
1. Généralités et vocabulaire

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc entièrement déterminée par la donnée de $n \times p$ scalaires qui la déterminent ce qui implique notamment que :

Théorème 1 :

$$\mathrm{A} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \iff \forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!],\ a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Une matrice est nulle si, et seulement si ses coefficients sont tous nuls.

Assez logiquement, la matrice $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$, notée parfois $(0)_{n,p}$, sera appelée la **matrice nulle**.

Remarque : Pour différencier les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ que sont les matrices colonnes (ou lignes) des coefficients $x_i \in \mathbb{K}$ qui les déterminent, on appelle scalaire, tout élément de $\mathbb{K}$.

Exercice 1 :

Représenter les matrices suivantes telles que :

1. A est la matrice de $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = i + j$

Exercice 1 :

Représenter les matrices suivantes telles que :

1. A est la matrice de $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = i + j$
2. B est la matrice de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 1 :

Représenter les matrices suivantes telles que :

1. A est la matrice de $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = i + j$
2. B est la matrice de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. C est la matrice de $\mathcal{M}_{4}(\mathbb{R})$ telle que $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 1 :

Représenter les matrices suivantes telles que :

1. A est la matrice de $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = i + j$
2. B est la matrice de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. C est la matrice de $\mathcal{M}_{4}(\mathbb{R})$ telle que $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $\mathrm{D} = \left(a^{\min(i,j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 1 :

Représenter les matrices suivantes telles que :

1. A est la matrice de $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = i + j$
2. B est la matrice de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. C est la matrice de $\mathcal{M}_{4}(\mathbb{R})$ telle que $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $\mathrm{D} = \left(a^{\min(i,j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
5. $\mathrm{E} = \left(|i - j|\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Exercice 1 :

Représenter les matrices suivantes telles que :

1. A est la matrice de $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = i + j$
2. B est la matrice de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. C est la matrice de $\mathcal{M}_{4}(\mathbb{R})$ telle que $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $D = \left(a^{\min(i,j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
5. $E = \left(|i - j|\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
6. $F = \left(\delta_{i+j,n+1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 1 :

Représenter les matrices suivantes telles que :

1. A est la matrice de $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = i + j$
2. B est la matrice de $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i - j = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. C est la matrice de $\mathcal{M}_{4}(\mathbb{R})$ telle que $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $\mathrm{D} = \left(a^{\min(i,j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
5. $\mathrm{E} = \left(|i - j|\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
6. $\mathrm{F} = \left(\delta_{i+j,n+1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
7. $\mathrm{G} = \left(\operatorname{sh}\,(a_i + a_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

- Si $n = 1$, la matrice M est appelée matrice ou vecteur ligne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

- Si $n = 1$, la matrice M est appelée matrice ou vecteur ligne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

- Si $p = 1$, la matrice M est appelée matrice ou vecteur colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

- Si $n = 1$, la matrice M est appelée matrice ou vecteur ligne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

- Si $p = 1$, la matrice M est appelée matrice ou vecteur colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$$

- Si $m = n$, la matrice M est appelée matrice carrée d'ordre n. Leur ensemble est simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

- On appelle matrice unité ou identité d'ordre n, notée I_n, la matrice carrée d'ordre n qui ne possède que des « 1 » sur sa diagonale et des « 0 » ailleurs :

$$\mathrm{I}_n = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, \qquad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Vocabulaire : La notation $\delta_{i,j}$ porte le nom de symbole de Kronecker.

$$\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

- On appelle matrice diagonale d'ordre n la matrice carrée d'ordre n qui ne possède des éléments non nuls que sur sa diagonale : $a_{ij} = 0$, $\forall\, i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3(\mathbb{K}).$$

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ leur ensemble.

En particulier, les matrices $\lambda \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, sont appelées matrices scalaires

- On appelle matrice triangulaire (resp. strictement triangulaire) d'ordre n une matrice carrée d'ordre n qui possède un triangle composé uniquement de « 0 » sous la diagonale (resp. strictement sous) :
  $a_{ij} = 0,\ \forall\, i \leqslant j$ (resp. $i < j$) est une matrice triangulaire inférieure (resp. strictement inférieure).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

On note $\mathcal{T}_{n,\mathrm{I}}(\mathbb{K})$ leur ensemble

- On appelle matrice triangulaire (resp. strictement triangulaire) d'ordre n une matrice carrée d'ordre n qui possède un triangle composé uniquement de « 0 » sous la diagonale (resp. strictement sous) :
  $a_{ij} = 0, \forall\, i \leqslant j$ (resp. $i < j$) est une matrice triangulaire inférieure (resp. strictement inférieure).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure

On note $\mathcal{T}_{n,\mathrm{I}}(\mathbb{K})$ leur ensemble

- On appelle matrice triangulaire (resp. strictement triangulaire) d'ordre n une matrice carrée d'ordre n qui possède un triangle composé uniquement de « 0 » sous la diagonale (resp. strictement sous) :
  $a_{ij} = 0, \forall\, i \leqslant j$ (resp. $i < j$) est une matrice triangulaire inférieure (resp. strictement inférieure).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

On note $\mathcal{T}_{n,\mathrm{I}}(\mathbb{K})$ leur ensemble

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure

On note $\mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ leur ensemble

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice strictement triangulaire (inférieure)

- On appelle matrice triangulaire (resp. strictement triangulaire) d'ordre n une matrice carrée d'ordre n qui possède un triangle composé uniquement de « 0 » sous la diagonale (resp. strictement sous) :
$a_{ij} = 0,\ \forall\, i \leqslant j$ (resp. $i < j$) est une matrice triangulaire inférieure (resp. strictement inférieure).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure	Matrice triangulaire supérieure	Matrice strictement triangulaire (inférieure)

Remarques :

- Les matrices triangulaires sont des matrices carrées par définition.
- Les matrices diagonales sont exactement les matrices à la fois triangulaires supérieures ET triangulaires inférieures.

II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Comme précédemment, un nouvelle ensemble créé, il est nécessaire, afin d'en faire quelque chose, de définir les lois qui le régissent. On dit que l'on dote l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'une structure de groupe, d'anneau ou de $\mathbb{K}$-algèbre suivant les cas.

II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2 (Somme) :

Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices de **même** dimension.

La matrice $C = A \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} B$ est la matrice dont les coefficients sont les sommes des coefficients de A et B :

II. Opérations sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2 (Somme) :

Soient $\mathrm{A} = (a_{ij}), \mathrm{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices de **même** dimension.

La matrice $\mathrm{C} = \mathrm{A} \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} \mathrm{B}$ est la matrice dont les coefficients sont les sommes des coefficients de A et B :

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} \mathrm{B} \iff (a_{ij}) \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} (b_{ij}) = (a_{ij} \underset{\mathbb{K}}{+} b_{ij}).$$

Définition 2 (Somme) :

Soient $\mathrm{A} = (a_{ij}), \mathrm{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices de **même** dimension.

La matrice $\mathrm{C} = \mathrm{A} \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} \mathrm{B}$ est la matrice dont les coefficients sont les sommes des coefficients de A et B :

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} \mathrm{B} \iff (a_{ij}) \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} (b_{ij}) = (a_{ij} \underset{\mathbb{K}}{+} b_{ij}).$$

ATTENTION

Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions sinon leur addition n'est pas définie.

Exemples 2 :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ 4 & 3 & \\ -5 & -1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$

Exemples 2 :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Exemples 2 :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$

Remarque : On peut donc décomposer une matrice carrée en la somme de deux matrices triangulaires.

- La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ est l'élément neutre de l'addition définie ci-dessus :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \mathrm{A} + (0) = (0) + \mathrm{A} = \mathrm{A}.$$

- La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ est l'élément neutre de l'addition définie ci-dessus :

$$\forall \, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \; \mathrm{A} + (0) = (0) + \mathrm{A} = \mathrm{A}.$$

- Tout élément $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède un symétrique pour la loi $+$ appelé matrice opposée de A et notée $-\mathrm{A} = (-a_{ij})$. La matrice formée des opposés des coefficients de A :

$$\forall \, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \; \mathrm{A} + (-\mathrm{A}) = (-\mathrm{A}) + \mathrm{A} = (0).$$

- La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ est l'élément neutre de l'addition définie ci-dessus :
$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \mathrm{A} + (0) = (0) + \mathrm{A} = \mathrm{A}.$$
- Tout élément $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possède un symétrique pour la loi $+$ appelé matrice opposée de A et notée $-\mathrm{A} = (-a_{ij})$. La matrice formée des opposés des coefficients de A :
$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \mathrm{A} + (-\mathrm{A}) = (-\mathrm{A}) + \mathrm{A} = (0).$$
- De même que l'addition dans $\mathbb{K}$, l'addition des matrices vérifient les mêmes lois : associativité, commutativité, élément neutre et opposé.
On dit que l'ensemble $\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +\right)$ est un groupe commutatif.

En particulier, d'après le théorème (1), on en déduit :

Proposition 2 :

$$(a_{ij})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;p]\!]}} \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{=} (b_{ij})_{\substack{i\in[\![1;n]\!]\\ j\in[\![1;p]\!]}} \iff \forall\,(i\,;j)\in[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;p]\!],\ a_{ij}\underset{\mathbb{K}}{=}b_{ij}.$$

Deux matrices sont égales si, et seulement si elles ont les mêmes dimensions et leurs coefficients sont égaux deux à deux.

Définition 3 (Multiplication par un scalaire) :

Soient $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On définit le produit (externe) de la matrice A par le scalaire λ, noté $\lambda.\mathrm{A}$ ou $\lambda\mathrm{A}$, comme la matrice dont chaque coefficient est multiplié par λ :

$$\lambda \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{.} (a_{ij}) = (\lambda \underset{\mathbb{K}}{\times} a_{ij}).$$

Définition 3 (Multiplication par un scalaire) :

Soient $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On définit le produit (externe) de la matrice A par le scalaire λ, noté $\lambda.\mathrm{A}$ ou $\lambda\mathrm{A}$, comme la matrice dont chaque coefficient est multiplié par λ :

$$\lambda \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{.} (a_{ij}) = (\lambda \underset{\mathbb{K}}{\times} a_{ij}).$$

- Plus généralement, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ la combinaison linéaire de A et $\mathrm{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice, notée $\lambda.\mathrm{A} + \mu.\mathrm{B}$, de coefficients :

$$\lambda \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{.} (a_{ij}) \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{+} \mu \underset{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}{.} (b_{ij}) = \left(\lambda \underset{\mathbb{K}}{\times} a_{ij} \underset{\mathbb{K}}{+} \mu \underset{\mathbb{K}}{\times} b_{ij}\right).$$

Exemple 3 :

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc stable par combinaisons linéaires *i.e.*

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \lambda.\mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Comme sa consœur, la loi externe est distributive sur la somme *i.e.*

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \lambda.(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \lambda.\mathrm{A} + \lambda.\mathrm{B}.$$

On dit que l'ensemble $\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); +; .\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 4 :

$3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le système : $\left\{\begin{aligned} 3X + 4Y &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \\ -2X + 3Y &= \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}\right.$

Définition 4 (Matrices élémentaires) :

Soit $(i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$.

On appelle matrice élémentaire (de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$), notée $\mathrm{E}_{i,j,n,p}$ ou $\mathrm{E}_{i,j}$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient de position (i,j), égal à 1 :

$$\mathrm{E}_{i,j,n,p} = \left(\delta_{k,i}\delta_{l,j}\right)_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant p}}.$$

$$\mathrm{E}_{i,j,n,p} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \quad\quad\uparrow & \\ \quad\quad j & \end{array}$$

Figure 1 – Matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 5 :

Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont :

- $\mathrm{E}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $\mathrm{E}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $\mathrm{E}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $\mathrm{E}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- $\mathrm{E}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
- et $\mathrm{E}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il est assez clair que toute matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaires de matrices élémentaires :

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} = m_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} m_{ij} \, \mathrm{E}_{i,j}. \end{aligned}$$

Plus généralement,

Proposition 3 :

$$\forall\, \mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{A} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij}\, \mathrm{E}_{i,j}.$$

La proposition (3) nous fera bientôt dire que la famille $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ forme une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique.

Définition 5 (Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne) :

Le produit d'un vecteur ligne L par un vecteur colonne C de même dimension n est égal au produit scalaire des deux vecteurs considérés comme deux vecteurs colonnes.

$$\mathrm{LC} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \vec{\mathrm{L}} \cdot \vec{\mathrm{C}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Définition 5 (Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne) :

Le produit d'un vecteur ligne L par un vecteur colonne C de même dimension n est égal au produit scalaire des deux vecteurs considérés comme deux vecteurs colonnes.

$$\mathrm{LC} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \vec{\mathrm{L}} \cdot \vec{\mathrm{C}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

ATTENTION

au sens ! On parle ici du produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne et non du produit d'un vecteur colonne par un vecteur ligne qui viendra plus tard.

Exercice 3 :

Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

On généralise cette opération à deux matrices quelconques A et B pourvu que le nombre de colonnes de la matrice A correspondent au nombre de lignes de la matrice B.

Définition 6 :

Le produit de la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par la matrice $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ est égal à la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ dont chaque coefficient c_{ij} est égal au produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ligne de la matrice A par la $j^{\text{ème}}$colonne de la matrice B :

$$\forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;m]\!],\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}. = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

En particulier, l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit.

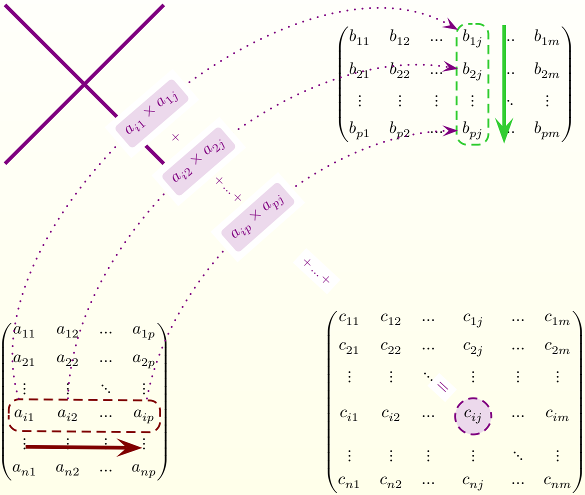

Figure 2 – Produit matriciel

Exemple 6 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 7 & -3 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarques :

- La matrice de gauche détermine le nombre de lignes tandis que celle de droite, celui des colonnes.

ATTENTION

le nombre de colonnes de la matrice de gauche doit être égal au nombre de lignes de la matrice de droite sinon le produit n'est pas défini.

- Le produit à droite d'une matrice par un vecteur colonne est un vecteur colonne et le produit à gauche d'une matrice par un vecteur ligne est un vecteur ligne.
- la complexité de la multiplication matricielle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est en $\mathrm{O}\left(n^3\right)$ *i.e.* du même ordre de grandeur que λn^3 où λ est une constante.

Exercice 4 :

Effectuer les sommes et produits **possibles** de matrices entre :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ATTENTION

Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille.

Mais, même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a, en général, AB $\neq$ BA. Les exemples suivants sont à retenir afin d'éviter d'écrire des bourdes.

ATTENTION

Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille.

Mais, même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a, en général, AB $\neq$ BA. Les exemples suivants sont à retenir afin d'éviter d'écrire des bourdes.

Exemple 7 (AB $\neq$ BA) :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 8 ($AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$) :

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Les matrices A et B sont alors appelées des diviseurs de zéro.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un anneau non intègre.

Exemple 8 ($AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$) :

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Les matrices A et B sont alors appelées des diviseurs de zéro.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un anneau non intègre.

Exemple 9 ($AB = AC$ n'implique pas $B = C$) :

On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 :

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Résoudre $AX = B$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

Exemples 10 (Lignes d'une matrice) :

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $j \in [\![1\,;p]\!]$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \times A = \begin{pmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jp} \end{pmatrix} \text{ est la } j^{\text{ème}} \text{ ligne de A.}$$

à la position j

Exemples 10 (Lignes d'une matrice) :

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $j \in [\![1\,;p]\!]$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \underset{\text{à la position } j}{1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \times A = \begin{pmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jp} \end{pmatrix}$$ est la $j^{\text{ème}}$ ligne de A.

En particulier, $E_{i,j,q,n} \times A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ en notant $L_j = \begin{pmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jp} \end{pmatrix}$.

à la position i

Exemples II (Colonnes d'une matrice) :

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $j \in [\![1\,;p]\!]$

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de A.}$$

à la position i

Exemples II (Colonnes d'une matrice) :

Soient $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $j \in [\![1\,;p]\!]$

$$\mathrm{A} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de A.}$$

à la position i

En particulier, $\mathrm{A} \times \mathrm{E}_{i,j,p,q} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mathrm{C}_i & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ en notant $\mathrm{C}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$.

à la position j

Exercice 6 :

Calculer $\mathrm{E}_{i,j} \times \mathrm{E}_{k,l}$.

Plus généralement, on a :

Proposition 4 (Produit d'une matrice par un vecteur colonne) :

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont notées A_1, ..., A_p.

Pour tout $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ on a :

$$\mathrm{AX} = \sum_{k=1}^{p} x_k \mathrm{A}_k \in \mathbb{K}^n.$$

Autrement dit, le produit d'une matrice A par un vecteur colonne est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Plus généralement, on a :

Proposition 4 (Produit d'une matrice par un vecteur colonne) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont notées A_1, ..., A_p.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ on a :

$$AX = \sum_{k=1}^{p} x_k A_k \in \mathbb{K}^n.$$

Autrement dit, le produit d'une matrice A par un vecteur colonne est une combinaison linéaire des colonnes de A.

En particulier, le produit à droite d'une matrice $n \times p$ par un vecteur colonne $p \times 1$ est un vecteur colonne $n \times 1$.

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Figure 3 – Produit (à droite) d'une matrice par un vecteur colonne.

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{np}x_p \end{pmatrix}$$

Figure 3 – Produit (à droite) d'une matrice par un vecteur colonne.

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{np}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{1k}x_k \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{nk}x_k \end{pmatrix}$$

Figure 3 – Produit (à droite) d'une matrice par un vecteur colonne.

$$\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{np}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{1k}x_k \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{nk}x_k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} x_k \mathrm{A}_k.$$

Figure 3 – Produit (à droite) d'une matrice par un vecteur colonne.

Proposition 5 (Propriétés algébriques de la multiplication) :

Lorsque celui-ci est possible, le produit de deux matrices est :

Associatif : $A(BC) = (AB)C = ABC$.

Proposition 5 (Propriétés algébriques de la multiplication) :

Lorsque celui-ci est possible, le produit de deux matrices est :

Associatif : $A(BC) = (AB)C = ABC$.

Bilinéaire : $A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC$ et $(\lambda B + C)A = \lambda BA + CA$.

Proposition 5 (Propriétés algébriques de la multiplication) :

Lorsque celui-ci est possible, le produit de deux matrices est :

Associatif : $A(BC) = (AB)C = ABC$.

Bilinéaire : $A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC$ et $(\lambda B + C)A = \lambda BA + CA$.

Non commutatif : $AB \neq BA$ en général.

Proposition 5 (Propriétés algébriques de la multiplication) :

Lorsque celui-ci est possible, le produit de deux matrices est :

Associatif : $A(BC) = (AB)C = ABC$.

Bilinéaire : $A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC$ et $(\lambda B + C)A = \lambda BA + CA$.

Non commutatif : $AB \neq BA$ en général.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Élément neutre : $AI_p = I_nA = A$.

I_p est élément neutre pour la multiplication à droite et I_n pour la multiplication à gauche.

Proposition 5 (Propriétés algébriques de la multiplication) :

Lorsque celui-ci est possible, le produit de deux matrices est :

Associatif : $A(BC) = (AB)C = ABC$.

Bilinéaire : $A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC$ et $(\lambda B + C)A = \lambda BA + CA$.

Non commutatif : $AB \neq BA$ en général.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Élément neutre : $AI_p = I_n A = A$.

I_p est élément neutre pour la multiplication à droite et I_n pour la multiplication à gauche.

Élément absorbant : $(0)_{m,n}A = (0)_{m,p}$ et $A(0)_{p,q} = (0)_{n,q}, \quad \forall\, m, q \in \mathbb{N}^*$.

On dit que la matrice nulle est un élément absorbant pour le produit matriciel.

Exercice 7 :

Trouver les matrices qui commutent avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Définition 7 :

La transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $A^\top$ ou anciennement ${}^tA$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A.

$$A^\top = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

Définition 7 :

La transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $A^\top$ ou anciennement ${}^tA$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A.

$$A^\top = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

Exemple 12 :

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ alors $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Définition 7 :

La transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $A^\top$ ou anciennement ${}^t A$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A.

$$A^\top = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

Remarque : La transposée d'un vecteur colonne est un vecteur ligne et réciproquement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 6 (Propriété de la transposition) :

Linéarité : Pour tous A, B $\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top$.

Proposition 6 (Propriété de la transposition) :

Linéarité : Pour tous A, B $\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top$.

Involutivité : Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$.

Proposition 6 (Propriété de la transposition) :

Linéarité : Pour tous A, B $\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top$.

Involutivité : Pour tous A $\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$.

Contravariance : Pour tous A $\in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et B $\in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Remarques :

- Soient $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
  Alors leur produit scalaire $\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y}$ peut-être vu comme un produit matriciel :

$$\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y} = XY^\top = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Remarques :

- Soient $\overrightarrow{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{Y}} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
  Alors leur produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{X}}.\overrightarrow{\mathrm{Y}}$ peut-être vu comme un produit matriciel :
  $$\overrightarrow{\mathrm{X}}.\overrightarrow{\mathrm{Y}} = \mathrm{XY}^\top.$$
- De la même manière, soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \\ \dots \\ \mathrm{A}_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et
  $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 & \dots & \mathrm{B}_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ où $\forall\ (i\,;j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, $\mathrm{A}_i \in \mathbb{K}^p$ est la $i^{\text{ème}}$ligne de A et $\mathrm{B}_j \in \mathbb{K}^p$ est la $j^{\text{ème}}$colonne de B.
  Alors $(\mathrm{AB})_{ij} = \overrightarrow{\mathrm{A}_i}.\overrightarrow{\mathrm{B}_j}^\top$ où A_i et B_j sont vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^p$.

Définition 8 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est symétrique si, et seulement si $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}$ autrement dit :

$$\forall\, i, \in [\![1\,;n]\!]\,,\ a_{ij} = a_{ji}.$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 8 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est symétrique si, et seulement si $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}$ autrement dit :

$$\forall\, i, \in [\![1\,;n]\!]\,,\ a_{ij} = a_{ji}.$$

  On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- On dit que A est anti-symétrique si, et seulement si $\mathrm{A}^\top = -\mathrm{A}$ autrement dit :

$$\forall\, i, \in [\![1\,;n]\!]\,,\ a_{ij} = -a_{ji}.$$

  On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque : Les matrices symétriques sont donc les invariants de la transposition.

En particulier, les coefficients de la diagonale d'une matrice anti-symétriques sont nécessairement nuls et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \left\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\right\}$.

Remarque : Les matrices symétriques sont donc les invariants de la transposition.

En particulier, les coefficients de la diagonale d'une matrice anti-symétriques sont nécessairement nuls et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \left\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\right\}$.

Exemples 12 :

$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 8 :

Soit A une matrice carrée à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que $A^\top A$ est symétrique.

Exercice 8 :

Soit A une matrice carrée à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que $A^\top A$ est symétrique.
2. Démontrer que A^2 est symétrique si A est symétrique ou antisymétrique.

Revenons sur la proposition (5) spécifiquement dans le cas où $n = p$ des matrices carrées.

D'après celle-ci, le produit de deux matrices carrées d'ordre n est encore une matrice carrée d'ordre n, ce qui fait de la multiplication matricielle une opération appelée loi interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associative, distributive, admettant la matrice $\mathbf{I}_n$ comme élément neutre, mais pas commutative.

III. L'algèbre des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Revenons sur la proposition (5) spécifiquement dans le cas où $n = p$ des matrices carrées.

D'après celle-ci, le produit de deux matrices carrées d'ordre n est encore une matrice carrée d'ordre n, ce qui fait de la multiplication matricielle une opération appelée loi interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associative, distributive, admettant la matrice $\mathbf{I}_n$ comme élément neutre, mais pas commutative.

On dit que l'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau unitaire d'unité la matrice I_n et que l'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative.

Proposition 7 (Produits et combinaisons linéaires de matrices diagonales) :

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit matriciel.

Proposition 7 (Produits et combinaisons linéaires de matrices diagonales) :

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit matriciel.

- $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda\mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 7 (Produits et combinaisons linéaires de matrices diagonales) :

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit matriciel.

- $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda\mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$

- $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{AB} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}.$$

Remarque : Pour économiser de la place on trouve souvent l'écriture $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$ abrégée en $D = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Tout le monde comprendra...

Exercice 9 :

Déterminer $\left\{\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, \forall\, \mathrm{D} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \mathrm{AD} = \mathrm{DA}\right\}$.

Proposition 8 (Produits et combinaisons linéaires de matrices triangulaires) :

$\mathrm{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit matriciel.

- $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K}).$

Proposition 8 (Produits et combinaisons linéaires de matrices triangulaires) :

$\mathrm{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit matriciel.

- $\forall\, \mathrm{A},\, \mathrm{B} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$.
- $\forall\, \mathrm{A},\, \mathrm{B} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{AB} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & b_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22}b_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

Proposition 8 (Produits et combinaisons linéaires de matrices triangulaires) :

$\mathrm{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit matriciel.

- $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K}), \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda\mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$.
- $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{AB} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & b_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22}b_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

En particulier, les termes diagonaux du produit sont les produits des termes diagonaux *i.e.*

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ (\mathrm{AB})_{ii} = a_{ii}b_{ii}.$$

Proposition 8 (Produits et combinaisons linéaires de matrices triangulaires) :

$\mathrm{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires et par produit matriciel.

- $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$.
- $\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{AB} \in \mathcal{T}_{n,\mathrm{S}}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & b_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22}b_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

En particulier, les termes diagonaux du produit sont les produits des termes diagonaux *i.e.*

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!],\ (\mathrm{AB})_{ii} = a_{ii}b_{ii}.$$

Les résultats sont similaires pour les matrices triangulaires inférieures.

Définition 9 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ la puissance $k^{\text{ème}}$ de A par récurrence :

$$\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n$$
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{A}^{k+1} = \mathrm{A}\mathrm{A}^k = \underbrace{\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \ldots \times \mathrm{A}.}_{k+1 \text{ fois}}$$

Définition 9 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ la puissance $k^{\text{ème}}$ de A par récurrence :

$$A^0 = I_n$$
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} = AA^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A.}_{k+1 \text{ fois}}$$

Remarques :

- On ne peut définir de puissance $k^{\text{ème}}$ que pour des matrices carrées.

Définition 9 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ la puissance $k^{\text{ème}}$ de A par récurrence :

$$A^0 = I_n$$
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} = AA^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k+1 \text{ fois}}.$$

Remarques :

- On ne peut définir de puissance $k^{\text{ème}}$ que pour des matrices carrées.
- Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, on a $A^k A^l = A^l A^k = A^{k+l}$.

Définition 9 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ la puissance $k^{\text{ème}}$ de A par récurrence :

$$\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n$$
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{A}^{k+1} = \mathrm{A}\mathrm{A}^k = \underbrace{\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \ldots \times \mathrm{A}}_{k+1 \text{ fois}}.$$

Remarques :

- On ne peut définir de puissance $k^{\text{ème}}$ que pour des matrices carrées.
- Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{A}^k\mathrm{A}^l = \mathrm{A}^l\mathrm{A}^k = \mathrm{A}^{k+l}$.
- Cependant, en général, pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $(\mathrm{AB})^2 \neq \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2$. On peut seulement affirmer que $(\mathrm{AB})^2 = \mathrm{ABAB}$.

Exemple 13 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A \times (A \times A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 :

Soient $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer N^n et A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 1 :

Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\Big(diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\Big)^p = diag(\alpha_1^p, \dots, \alpha_n^p).$$

et

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22}^p & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^p \end{pmatrix}.$$

Corollaire 1 :

Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\Big(diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\Big)^p = diag(\alpha_1^p, \dots, \alpha_n^p).$$

et

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_{11}^p & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22}^p & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^p \end{pmatrix}.$$

Exemple 14 :

$$\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} \pi^7 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Théorème 9 :

Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, si $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ alors :

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mathrm{A}^k \times \mathrm{B}^{p-k} \qquad \text{(Binôme de Newton).}$$

Théorème 9 :

Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, si $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ alors :

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mathrm{A}^k \times \mathrm{B}^{p-k} \qquad \text{(Binôme de Newton).}$$

$$\mathrm{A}^p - \mathrm{B}^p = (\mathrm{A}-\mathrm{B}) \left(\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{p-1-k} \right) = \left(\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{p-1-k} \right) (\mathrm{A}-\mathrm{B}).$$

(Factorisation de $\mathrm{A}^p - \mathrm{B}^p$).

ATTENTION

Si A et B ne commutent pas *i.e.* $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$ alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 &= (\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \\ &= \mathrm{A}^2+\mathrm{AB}+\mathrm{BA}+\mathrm{B}^2 \neq \mathrm{A}^2+2\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2!\ \ldots\end{aligned}$$

Et,

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \mathrm{A}^2-\mathrm{AB}+\mathrm{BA}-\mathrm{B}^2 \neq \mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2!\ldots$$

ATTENTION

Si A et B ne commutent pas *i.e.* $AB \neq BA$ alors

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2+2AB+B^2! \ \ldots\end{aligned}$$

Et,

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2! \ldots$$

Exemple 15 :

Comme toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec I_n, on a :

$$(A+I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k = A^p + pA^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}A^{p-2} + \cdots + pA + \mathbf{I}_n.$$

ATTENTION

Si A et B ne commutent pas *i.e.* $AB \neq BA$ alors

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2! \ \ldots\end{aligned}$$

Et,

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2! \ldots$$

Exemple 15 :

Comme toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec I_n, on a :

$$(A+I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k = A^p + pA^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}A^{p-2} + \cdots + pA + \mathbf{I}_n.$$

$$I_n - A^p = (I_n - A)\sum_{k=0}^{p-1} A^k = (I_n - A)\left(A^{p-1} + A^{p-2} + \ldots + A + I_n\right).$$

Définition 10 (Matrice nilpotente) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est nilpotente si $\exists\, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Le plus petit entier p pour laquelle cette identité est vraie est appelé l'indice de nilpotence de A :

$$p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\right\}.$$

Définition 10 (Matrice nilpotente) :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est nilpotente si $\exists\, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Le plus petit entier p pour laquelle cette identité est vraie est appelé l'indice de nilpotence de A :

$$p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, \mathrm{A}^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\right\}.$$

Pour tout matrice N nilpotente d'indice p,

$$\forall\, k < p, \quad \mathrm{N}^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant p, \quad \mathrm{N}^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Définition 10 (Matrice nilpotente) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est nilpotente si $\exists\, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Le plus petit entier p pour laquelle cette identité est vraie est appelé l'indice de nilpotence de A :

$$p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \,/\, A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\right\}.$$

Pour tout matrice N nilpotente d'indice p,

$$\forall\, k < p, \quad N^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant p, \quad N^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Exemple 16 :

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 3.

Exercice 11 :

Déterminer toutes les matrices carrées d'ordre n qui sont à la fois nilpotentes et idempotentes (*i.e.* $A^2 = A$).

Méthode 1 :

Dans les cas où A peut de décomposer comme la somme de deux matrices qui **commutent**, on pourra utiliser la formule du binôme de Newton.

En particulier, si $A = \lambda I_n + N$ où N est une matrice nilpotente.

Méthode 1 :

Dans les cas où A peut de décomposer comme la somme de deux matrices qui **commutent**, on pourra utiliser la formule du binôme de Newton.

En particulier, si $A = \lambda I_n + N$ où N est une matrice nilpotente.

Exercice 12 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode 1 :

Dans les cas où A peut de décomposer comme la somme de deux matrices qui **commutent**, on pourra utiliser la formule du binôme de Newton.

En particulier, si $A = \lambda I_n + N$ où N est une matrice nilpotente.

Exercice 12 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^n, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En écrivant $A = I_3 + J$, calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Définition 11 (Inverse d'une matrice) :

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible (ou régulière) si, et seulement si il existe une matrice carrée B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{B} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n.$$

Définition 11 (Inverse d'une matrice) :

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible (ou régulière) si, et seulement si il existe une matrice carrée B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{B} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n.$$

ATTENTION

Par définition, une matrice inversible est nécessairement carrée !

Définition 11 (Inverse d'une matrice) :

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible (ou régulière) si, et seulement si il existe une matrice carrée B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Si A n'est pas inversible, on dit que la matrice A est singulière.

Définition 11 (Inverse d'une matrice) :

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible (ou régulière) si, et seulement si il existe une matrice carrée B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{B} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n.$$

Si A n'est pas inversible, on dit que la matrice A est singulière.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé le groupe linéaire d'ordre n sur $\mathbb{K}$. On le note $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.

IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

Définition 11 (Inverse d'une matrice) :

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible (ou régulière) si, et seulement si il existe une matrice carrée B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{B} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n.$$

Si A n'est pas inversible, on dit que la matrice A est singulière.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé le groupe linéaire d'ordre n sur $\mathbb{K}$. On le note $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.

Remarques : Une matrice B telle que $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$ s'appelle un inverse à droite de A. Une matrice B′ telle que $\mathrm{B'A} = \mathrm{I}_n$ s'appelle un inverse à gauche de A.

S'ils existent, un inverse à droite et un inverse à gauche sont nécessairement égaux.

Exemples 17 :

- Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

Exemples 17 :

- Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}l_2(\mathbb{K})$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 10 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A est inversible alors sa matrice inverse est unique. On la note A^{-1}.

Proposition 10 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A est inversible alors sa matrice inverse est unique. On la note A^{-1}.

Remarque :

- On retrouve la définition de l'inverse d'un réel x non nul *i.e.* le nombre $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ tel que $x \times \dfrac{1}{x} = 1$. La matrice unité I_n joue ici le rôle du 1 dans $\mathbb{R}$.

IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

Proposition 10 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A est inversible alors sa matrice inverse est unique. On la note A^{-1}.

Remarque :

- On retrouve la définition de l'inverse d'un réel x non nul *i.e.* le nombre $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ tel que $x \times \dfrac{1}{x} = 1$. La matrice unité I_n joue ici le rôle du 1 dans $\mathbb{R}$.
- C'est un fait général pour tout monoïde associatif.

Exemples 18 :

- La matrice I_n est inversible avec $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$.

Exemples 18 :

- La matrice I_n est inversible avec $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$.
- La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ n'est pas inversible.

IV. Matrices inversibles et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

Exemples 18 :

- La matrice I_n est inversible avec $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$.
- La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ n'est pas inversible.
- $\mathrm{A} \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K}) \iff \forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \lambda\mathrm{A} \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ et, dans ce cas, $(\lambda\mathrm{A})^{-1} = \lambda^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.

Exemples 18 :

- La matrice I_n est inversible avec $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$.
- La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ n'est pas inversible.
- $\mathrm{A} \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K}) \iff \forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \lambda\mathrm{A} \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ et, dans ce cas, $(\lambda\mathrm{A})^{-1} = \lambda^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.
- Une matrice nilpotente n'est pas inversible.

Exemples 18 :

- La matrice I_n est inversible avec $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$.
- La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ n'est pas inversible.
- $\mathrm{A} \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K}) \iff \forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \lambda\mathrm{A} \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ et, dans ce cas, $(\lambda\mathrm{A})^{-1} = \lambda^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.
- Une matrice nilpotente n'est pas inversible.

ATTENTION

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à la différence de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe des matrices non nulles comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas inversibles.

Exercice 13 :

Montrer que toute matrice carrée qui possède une ligne ou une colonne nulle N'est PAS inversible.

Exercice 13 :

Montrer que toute matrice carrée qui possède une ligne ou une colonne nulle N'est PAS inversible.

Exemple 19 :

$$A = \begin{pmatrix} i & 4 & 0 \\ 2+i & 5i & 0 \\ 3-i & 6 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{G}l_3(\mathbb{C}).$$

Exercice 14 :

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A}$.

Exercice 14 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 5A$.
2. En déduire que $A \in \mathcal{G}l_3(\mathbb{K})$ et calculer A^{-1}.

Exercice 14 :

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A}$.
2. En déduire que $\mathrm{A} \in \mathcal{G}l_3(\mathbb{K})$ et calculer A^{-1}.

Remarque : Le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 6$ est appelé polynôme annulateur de la matrice A. Une matrice donnée, l'existence d'un polynôme annulateur de valuation nulle (*i.e.* le monôme de plus bas degré est une constante) assure qu'elle soit inversible :
S'il existe $\mathrm{P} = a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + ... + a_1\mathrm{X} + a_0$ avec $a_0 \neq 0$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0_{\mathcal{M}_n}$ alors A est inversible et

$$\mathrm{A}^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(a_n\mathrm{A}^{n-1} + a_{n-1}\mathrm{A}^{n-2} + ... + a_1\mathrm{I}\right).$$

Méthode 2 :

Soit A une matrice et P un polynôme annulateur de A dont le terme constant est non nul. Alors,

- A est inversible,

Méthode 2 :

Soit A une matrice et P un polynôme annulateur de A dont le terme constant est non nul. Alors,

- A est inversible,
- On trouve l'expression de A^{-1} à partir de l'expression $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ en isolant le multiple de I_n et en factorisant par A.

Théorème 11 (Opérations sur les matrices inversibles) :

Soient $A, B \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.

Involutivité : A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Théorème 11 (Opérations sur les matrices inversibles) :

Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.

Involutivité : A^{-1} est inversible et $\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathrm{A}$.

Produit : AB est inversible et $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.

Théorème 11 (Opérations sur les matrices inversibles) :

Soient $A, B \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.

Involutivité : A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Produit : AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Puissance : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A^k est inversible et $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.

Théorème 11 (Opérations sur les matrices inversibles) :

Soient $A, B \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.

Involutivité : A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Produit : AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Puissance : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A^k est inversible et $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.

Transposition : $A^\top$ est inversible et $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.

Théorème 11 (Opérations sur les matrices inversibles) :

Soient $A, B \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.

Involutivité : A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Produit : AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Puissance : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A^k est inversible et $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.

Transposition : $A^\top$ est inversible et $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.

On retiendra donc que $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ est stable par inverse et produit : $\left(\mathcal{G}l_n(\mathbb{K}), \times\right)$ est, comme son nom l'indique, un groupe (non commutatif).

ATTENTION

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

Rappelez vous que la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutative :

$\left(A^{-1}B^{-1}\right)(AB)$ ne donne rien.

ATTENTION

$(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1} \neq \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1}$.

Rappelez vous que la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutative :

$\left(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1}\right)(\mathrm{AB})$ ne donne rien.

ATTENTION

A et B inversible $\cancel{\Longrightarrow}$ $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ inversible.

Définition 12 (Déterminant d'une matrice) :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre 2, on appelle déterminant de la matrice A, noté $\det(A)$, le scalaire tel que :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Définition 12 (Déterminant d'une matrice) :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre 2, on appelle déterminant de la matrice A, noté $\det(A)$, le scalaire tel que :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple 20 :

Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \times 1 - 2 \times 3 = -2.$

Théorème 12 (Inverse d'une matrice d'ordre 2) :

Une matrice carrée d'ordre deux est inversible si, et seulement si son déterminant est différent de 0.

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}),\ \mathrm{A}^{-1} \text{ existe } \iff \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

Théorème 12 (Inverse d'une matrice d'ordre 2) :

Une matrice carrée d'ordre deux est inversible si, et seulement si son déterminant est différent de 0.

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}),\ \mathrm{A}^{-1} \text{ existe} \iff \det(\mathrm{A}) \neq 0.$$

On a alors :

$$\text{Si } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Exemple 21 :

Déterminer la matrice inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. On calcule : $\det(A) = 4 \times 1 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$ donc la matrice A est inversible.

Exemple 21 :

Déterminer la matrice inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. On calcule : $\det(A) = 4 \times 1 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$ donc la matrice A est inversible.
2. La condition d'inversibilité remplie, on applique la formule (1) :

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 :

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$. On pose $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.
   Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M}^k = \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}$.

Exercice 15 :

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$. On pose $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.
   Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathrm{M}^k = \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}$.
2. Soient $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Déterminer P^{-1} et calculer $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.

Exercice 15 :

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$. On pose $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.
   Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M}^k = \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}$.
2. Soient $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Déterminer P^{-1} et calculer $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$.
3. Calculer M^k, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Méthode 3 :

- Si D est diagonale avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alors

$$\mathrm{D}^k = \mathrm{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k).$$

Méthode 3 :

- Si D est diagonale avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alors
$$\mathrm{D}^k = \mathrm{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k).$$
- Si A est semblable à une matrice diagonale *i.e.* $\exists\, \mathrm{P} \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$, alors :
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^k = \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}.$$

Théorème 13 (Matrice diagonale) :

Soient α_1, ..., α_n, $\beta_1 \in \mathbb{K}$, alors : $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\alpha_i \neq 0$ et alors :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Théorème 14 (Matrice triangulaire) :

Une matrice triangulaire A est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.

Dans ce cas, A^{-1} est aussi triangulaire de même type et ses coefficients diagonaux sont exactement les inverses des coefficients diagonaux de A.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & \star & \star & \star \\ 0 & a_{22}^{-1} & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$

La notion de trace vous paraîtra un peu anecdotique pour le moment mais elle est très importante, alors autant l'introduire tout de suite.

Définition 13 (Trace d'une matrice carrée) :

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle trace de A et on note $\operatorname{tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux de A :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

La notion de trace vous paraîtra un peu anecdotique pour le moment mais elle est très importante, alors autant l'introduire tout de suite.

Définition 13 (Trace d'une matrice carrée) :

Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}\,(\mathrm{A})$ la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemples 22 :

- $\mathrm{tr}\,(\mathrm{I}_n) = n$.

La notion de trace vous paraîtra un peu anecdotique pour le moment mais elle est très importante, alors autant l'introduire tout de suite.

Définition 13 (Trace d'une matrice carrée) :

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemples 22 :

- $\mathrm{tr}(I_n) = n$.
- Si $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 14 \\ 5 & 9 & 13 \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{tr}(A) = -4 - 1 + 13 = 8$.

La notion de trace vous paraîtra un peu anecdotique pour le moment mais elle est très importante, alors autant l'introduire tout de suite.

Définition 13 (Trace d'une matrice carrée) :

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}\,(A)$ la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemples 22 :

- $\mathrm{tr}\,(I_n) = n$.
- Si $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 14 \\ 5 & 9 & 13 \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{tr}\,(A) = -4 - 1 + 13 = 8$.
- Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{tr}\,(A) = 0$.

Proposition 15 (Propriété de la trace) :

Linéarité : Pour tous A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{tr}\,(\lambda A + B) = \lambda \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(B)$.

Proposition 15 (Propriété de la trace) :

Linéarité : Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

Produit : Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Remarques :

- Lorsque qu'une matrice A est semblable à une matrice B *i.e.* il existe une matrice P inversible, dite de passage, telle que $A = P^{-1}BP$, on a alors :

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(P^{-1}BP\right) = \operatorname{tr}\left((P^{-1}P)B\right) = \operatorname{tr}(B).$$

On dit, pour cela, que la trace est un invariant de similitude.

Remarques :

- Lorsque qu'une matrice A est semblable à une matrice B *i.e.* il existe une matrice P inversible, dite de passage, telle que $A = P^{-1}BP$, on a alors :

  $$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(P^{-1}BP\right) = \operatorname{tr}\left((P^{-1}P)B\right) = \operatorname{tr}(B).$$

  On dit, pour cela, que la trace est un invariant de similitude.

- C'est ce résultat qui motive la définition (11) seulement sur les matrices carrées.
  En effet, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice rectangulaire. Si rien n'empêche, en théorie, de définir un inverse $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de A à partir des relations $AB = I_n$ et $BA = I_p$, on aurait cependant un petit soucis car :

  $$n = \operatorname{tr}(I_n) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}\left(I_p\right) = p.$$

Remarques :

- Lorsque qu'une matrice A est semblable à une matrice B *i.e.* il existe une matrice P inversible, dite de passage, telle que $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$, on a alors :

$$\operatorname{tr}(\mathrm{A}) = \operatorname{tr}\left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}\right) = \operatorname{tr}\left((\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P})\mathrm{B}\right) = \operatorname{tr}(\mathrm{B}).$$

  On dit, pour cela, que la trace est un invariant de similitude.

- C'est ce résultat qui motive la définition (11) seulement sur les matrices carrées.
  En effet, soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice rectangulaire. Si rien n'empêche, en théorie, de définir un inverse $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de A à partir des relations $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_p$, on aurait cependant un petit soucis car :

$$n = \operatorname{tr}(\mathrm{I}_n) = \operatorname{tr}(\mathrm{AB}) = \operatorname{tr}(\mathrm{BA}) = \operatorname{tr}\left(\mathrm{I}_p\right) = p.$$

Exemple 23 :

L'équation matricielle $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$ d'inconnue $(\mathrm{A}\,;\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ n'a pas de solution car pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\operatorname{tr}(\mathrm{AB} - \mathrm{BA}) = \operatorname{tr}(\mathrm{AB}) - \operatorname{tr}(\mathrm{BA}) = 0 \neq n = \operatorname{tr}(\mathrm{I}_n).$$