Matrices

I/ Calculs matriciels

Exercice 1 : Effectuer le produit des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & -1 & 1 \\ 0 & 2\,\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 0 \\ 3 & 3\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Soit $\mathrm{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer G est stable par produit.
2. Montrer que les matrices de G commutent.
3. Montrer que les matrices de G sont inversibles et que leurs inverses sont des éléments de G.

Exercice 3 : Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Application : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 : Montrer que le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si, et seulement si les deux matrices commutent.

Matrices

Exercice 5 : Une matrice carrée réelle A est dite *stochastique* si

$$\forall\, i,j \in [\![1\,;n]\!]\,,\quad 0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall\, j \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est aussi une matrice stochastique.
2. On pose $B = A^2$, $A_i = \max\limits_{j\in[\![1;n]\!]} (a_{i,j})$, $a_i = \min\limits_{j\in[\![1;n]\!]} (a_{i,j})$ et A une matrice stochastique.

   Montrer que $\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]$, $a_i \leqslant b_{i,j} \leqslant A_i$.

II/ Inverse et puissances de matrices

Exercice 6 :

1. Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

   Calculer $A(\theta) \times A(\theta')$ et $A(\theta)^n$ pour $n \geqslant 1$.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,(t) & \mathrm{sh}\,(t) \\ \mathrm{sh}\,(t) & \mathrm{ch}\,(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

   Calculer B^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 (Inverse de matrice et polynôme annulateur) :

1. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer B^2 et montrer que $B^2 = 2I_3 - B$.
   (b) En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.
2. Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $C^2 = 3C - 2I_3$.
   (b) En déduire que C est inversible et calculer C^{-1}.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $A^3 - 7A^2 + 13A$.
   (b) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 8 (Puissances de matrice et réduction) :

Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et calculer $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, T^n est de la forme $\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 2^n & a_n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$

   (où a_n est une suite que l'on déterminera plus loin).
3. On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{n-1}u_n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. En déduire a_n en fonction de n.
4. En déduire A^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 (Racine carrée de matrice) : Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 et N^3.
2. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\mathrm{A} = a\mathrm{N}^2 + b\mathrm{N} + c\mathrm{I}_3$.
3. Trouver $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$.

Exercice 10 (Puissances de matrice et binôme de Newton) :

1. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \mathrm{I}_3$.

   (a) Montrer que B est nilpotente d'indice 3.

   (b) En déduire A^n pour tout entier n.
2. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (Puissances de matrice et binôme de Newton bis) :

1. Soit $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que pour tout $k \in \mathrm{N}^*$, $\mathrm{J}^k = n^{k-1}\mathrm{J}$.
2. Pour $a, b \in \mathbb{K}$, on pose $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & b & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer V^n.

Exercice 12 (($\star$) Puissances de matrice et binôme de Newton ter) :

1. Soit $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer N^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour $a \in \mathbb{K}$, on pose $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ 0 & a & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Déterminer T^n.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit inversible.
   (c) Développer $\left(\mathrm{I}_n + \dfrac{1}{a}\mathrm{N}\right) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\dfrac{1}{a}\mathrm{N}\right)^k$ et en déduire l'inverse de T en fonction des puissances de N.
3. Pour $a, b \in \mathbb{K}$, mêmes questions avec $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ 0 & a & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

III/ Compléments

Exercice 13 : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, on définit :

$$\exp(\mathrm{A}) = \sum_{i \geqslant 0} \frac{\mathrm{A}^i}{i!},$$

la somme étant finie et s'arrêtant par exemple au premier indice i tel que $\mathrm{A}^i = 0$.

1. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$.
2. En déduire que $\exp(\mathrm{A})$ est toujours inversible et calculer son inverse.

Exercice 14 ($(\star)$ Matrice de Vandermonde des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité) :

Soit $\mathrm{V} = \left(v_{jk} = \omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant k\leqslant n}}$ où $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}$, $(n \geqslant 2)$.

1. Calculer $\mathrm{V}\overline{\mathrm{V}}$.
2. En déduire que V est inversible et donner son inverse.

[0]. **Alexandre-Théophile Vandermonde** (parfois appelé Alexis-Théophile), né à Paris le 28 février **1735** et mort à Paris le 1er janvier **1796**, est un mathématicien français.

Il fut aussi économiste, musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne **Bézout** et Antoine **Lavoisier**. Son nom est maintenant surtout associé à une matrice et son déterminant utilisés en *interpolation polynomiale*.

Un cas particulier de matrice de Vandermonde apparaît dans la formule de la *transformée de **Fourier*** discrète, où les coefficients (α_i) sont les racines complexes de l'unité.

En notant $\omega_j = \omega^{j-1}$, la matrice V s'écrit :

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & {\omega_1}^2 & \dots & {\omega_1}^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & {\omega_2}^2 & \dots & {\omega_2}^{n-1} \\ 1 & \omega_3 & {\omega_3}^2 & \dots & {\omega_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n & {\omega_n}^2 & \dots & {\omega_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, pour tous j et k, $v_{jk} = {\omega_j}^{k-1}$.

Matrices