Matrices

I/ Calculs matriciels

Exercice 1 : Effectuer le produit des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & -1 & 1 \\ 0 & 2\,\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 0 \\ 3 & 3\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Correction :

1. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & ab+bc+ac \\ a+b+c & ab+bc+ac & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & ab+bc+ac & ab+bc+ac \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & 1+2\,\mathrm{i} \\ 11+4\,\mathrm{i} & 9\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

6. (10)

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. Non défini.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer G est stable par produit.

2. Montrer que les matrices de G commutent.
3. Montrer que les matrices de G sont inversibles et que leurs inverses sont des éléments de G.

Correction : Exercice trivial à savoir faire absolument.

1. Soient $g_x = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $g_y = \begin{pmatrix} 2^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ deux éléments de G.

   Alors $g_x g_y = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = g_{x+y} \in \mathrm{G}$.

   Donc, G est stable par produit.
2. Le calcul précédent montre que $g_x g_y = g_{x+y} = g_{y+x} = g_y g_x$ *i.e.* le produit matriciel est commutatif sur G.
3. Le même calcul montre encore que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g_x g_{-x} = g_{-x} g_x = \mathrm{I}_3$ *i.e.* tout élément de G est inversible d'inverse g_{-x}.

Commentaires : *On vient de montrer que* $(\mathrm{G}\,;.)$ *était un groupe commutatif.*

Exercice 3 : Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Application : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction : Après un raisonnement par analyse-synthèse, on trouve rapidement que, $\forall\, \mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{A} = \underbrace{\frac{1}{2}.\left(\mathrm{A} + \mathrm{A}^\top\right)}_{\in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{1}{2}.\left(\mathrm{A} - \mathrm{A}^\top\right)}_{\in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})}.$$

Cette somme est clairement unique.

Commentaires : *Si vous avez assez de talent, intuition, métier, mémoire, chance pour trouver la forme demandée, le raisonnement par analyse-synthèse n'est pas nécessaire.*

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrices

Exercice 4 : Montrer que le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si, et seulement si les deux matrices commutent.

Correction : Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ deux matrices symétriques.

Si A et B commutent alors $(\mathrm{AB})^\top = \mathrm{B}^\top \mathrm{A}^\top = \mathrm{BA} = \mathrm{AB}$ et leur produit est symétrique.

Réciproquement, si $(\mathrm{AB})^\top = \mathrm{AB}$ alors $\mathrm{B}^\top \mathrm{A}^\top = \mathrm{AB}$, avec A et B symétriques, ceci s'écrit : $\mathrm{BA} = \mathrm{AB}$ et les deux matrices commutent.

Conclusion, le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si, et seulement si les deux matrices commutent.

Exercice 5 : Une matrice carrée réelle A est dite *stochastique* si

$$\forall\, i, j \in [\![1\,;n]\!]\,,\quad 0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall\, j \in [\![1\,;n]\!]\,, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est aussi une matrice stochastique.
2. On pose $\mathrm{B} = \mathrm{A}^2$, $\mathrm{A}_i = \max\limits_{j\in[\![1;n]\!]} (a_{i,j})$, $a_i = \min\limits_{j\in[\![1;n]\!]} (a_{i,j})$ et A une matrice stochastique.

   Montrer que $\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]$, $a_i \leqslant b_{i,j} \leqslant \mathrm{A}_i$.

Correction :

1. Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})$ deux matrices stochastiques, $\mathrm{C} = (c_{i,j})$ leur produit.

   On a :

   $$\forall\, i, j \in [\![1\,;n]\!]\,,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \geqslant 0.$$

   Et,

   $$\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} = 1.$$

   Les $c_{i,j}$ étant tous positifs, chacun est plus petit que leur somme *i.e.* $c_{i,j} \leqslant 1$.

   Le produit de deux matrices stochastiques est donc une matrices stochastique.
2. Soit $\mathrm{B} = (b_{i,j})$. Alors,

   $$\forall\, j \in [\![1\,;n]\!]\,,\ b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,j}$$
   $$a_i \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \leqslant b_{i,j} \leqslant \mathrm{A}_i \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}$$
   $$a_i \leqslant b_{i,j} \leqslant \mathrm{A}_i.$$

II/ Inverse et puissances de matrices

Exercice 6 :

1. Soit $\mathrm{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

   Calculer $\mathrm{A}(\theta) \times \mathrm{A}(\theta')$ et $\mathrm{A}(\theta)^n$ pour $n \geqslant 1$.
2. Soit $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & \operatorname{sh}(t) \\ \operatorname{sh}(t) & \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

   Calculer B^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(\theta) \times \mathrm{A}(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{A}(\theta+\theta')
\end{aligned}$$

Bilan, $\mathrm{A}(\theta) \times \mathrm{A}(\theta') = \mathrm{A}(\theta+\theta')$.

Nous allons montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $\mathrm{A}(\theta)^n = \mathrm{A}(n\theta)$.

— C'est bien sûr vrai pour $n = 1$.

— Fixons $n \geqslant 1$ et supposons que $(\mathrm{A}(\theta))^n = \mathrm{A}(n\theta)$ alors

$$(\mathrm{A}(\theta))^{n+1} = \mathrm{A}(\theta)^n \times \mathrm{A}(\theta) = \mathrm{A}(n\theta) \times \mathrm{A}(\theta) = \mathrm{A}(n\theta+\theta) = \mathrm{A}((n+1)\theta)$$

— C'est donc vrai pour tout $n \geqslant 1$.

Commentaires :

— *Comme $\mathrm{A}(\theta') \times \mathrm{A}(\theta) = \mathrm{A}(\theta+\theta') = \mathrm{A}(\theta) \times \mathrm{A}(\theta')$, on peut en déduire que les matrices $\mathrm{A}(\theta)$ et $\mathrm{A}(\theta')$ commutent.*

— *Comme $\mathrm{A}(\theta) \times \mathrm{A}(-\theta) = \mathrm{A}(0) = \mathrm{I}_2$, on pourrait prolonger la dernière identité à $n \in \mathbb{Z}$ mais seulement après avoir définie l'inverse d'une matrice :*

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ (\mathrm{A}(\theta))^n = \mathrm{A}(n\theta).$$

— *En terme géométrique $\mathrm{A}(\theta)$ est la matrice de la rotation d'angle θ (centrée à l'origine). On vient de montrer que si l'on compose une rotation d'angle θ avec un rotation d'angle θ' alors on obtient une rotation d'angle $\theta+\theta'$.*

2. Même combat, même résultat.

Exercice 7 (Inverse de matrice et polynôme annulateur) :

Matrices

1. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer B^2 et montrer que $B^2 = 2I_3 - B$.
   (b) En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.
2. Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $C^2 = 3C - 2I_3$.
   (b) En déduire que C est inversible et calculer C^{-1}.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $A^3 - 7A^2 + 13A$.
   (b) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Correction :

1. (a) $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2I_3 - B$.
   (b) D'après la question précédente,
   $$B^2 = 2I_3 - B \iff B.\frac{1}{2}(B + I_3) = \frac{1}{2}(B + I_3).B = I_3.$$
   Donc, B est inversible et $B^{-1} = \frac{1}{2}(B + I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Le raisonnement est identique donc, en plus rapide :
   (a) $C^2 = 3C - 2I_3$.
   (b) $C^2 = 3C - 2I_3 \iff C.\frac{1}{2}(3I_3 - C) = \frac{1}{2}(3I_3 - C).C = I_3$ donc C est inversible et $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Toujours pareil :
   (a) $A^3 - 7A^2 + 13A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ 21 & 5 & 87 \\ 22 & -7 & 70 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 18 \\ 5 & -1 & 17 \end{pmatrix} + 13\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 3I_3$.
   (b) $A^3 - 7A^2 + 13A = 3I_3 \iff A.\frac{1}{3}(A^2 - 7A + 13I_3) = \frac{1}{3}(A^2 - 7A + 13I_3).A = I_3$ donc A est inversible et
   $$A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - 7A + 13I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrices

Exercice 8 (Puissances de matrice et réduction) :

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et calculer $T = P^{-1}AP$.
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, T^n est de la forme $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & a_n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$ (où a_n est une suite que l'on déterminera plus loin).
3. On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{n-1}u_n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. En déduire a_n en fonction de n.
4. En déduire A^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1. Après calcul, $P\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} P = I_3$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Après calcul toujours, $T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Montrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

   Pour $n = 1$, $T = \begin{pmatrix} 2^1 & a_1 & 0 \\ 0 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^1 \end{pmatrix}$ avec $a_1 = 1$ et T^1 est bien de la forme souhaitée.

   Supposons cette forme pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors :

   $$T^{n+1} = TT^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & a_n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & a_{n+1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{n+1} \end{pmatrix} \text{ avec } a_{n+1} = 2a_n + 2^n.$$

   La forme est bien héréditaire. Initialisée pour $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

   $$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ a_{n+1} & = 2a_n + 2^n. \end{cases}$$
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2^{-n}a_{n+1} = 2^{-n}\left(2a_n + 2^n\right) = 2^{-(n-1)}a_n + 1 = u_n + 1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_1 = a_1 = 1$.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + (n-1) = n$ et $a_n = n2^{n-1}$.

4. On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}^n = \underbrace{\mathrm{P}\mathrm{T}^n\mathrm{P}^{-1}}_{\text{à montrer par récurrence}} = \begin{pmatrix} (n+2)2^{n-1} & n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ 2^{n-1} - 2^{2n-1} & 2^{n-1} + 2^{2n-1} & 2^{2n-1} - 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-1} - 2^{2n-1} & (n-1)2^{n-1} + 2^{2n-1} & -(n-1)2^{n-1} + 2^{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 (Racine carrée de matrice) : Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 et N^3.
2. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\mathrm{A} = a\mathrm{N}^2 + b\mathrm{N} + c\mathrm{I}_3$.
3. Trouver $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$.

Correction :

1. $\mathrm{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N}^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. La matrice N est donc nilpotente d'indice 3.
2. Il est assez simple de voir que $\mathrm{A} = 2\mathrm{N}^2 + \mathrm{N} + \mathrm{I}_3$.
3. Cherchons B sous la même forme que A *i.e.* $\mathrm{B} = \alpha\mathrm{N}^2 + \beta\mathrm{N} + \gamma\mathrm{I}_3$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{B}^2 = \mathrm{A} \iff \left(\alpha\mathrm{N}^2 + \beta\mathrm{N} + \gamma\mathrm{I}_3\right)^2 = 2\mathrm{N}^2 + \mathrm{N} + \mathrm{I}_3$$

Avec $\mathrm{N}^3 = \mathrm{N}^4 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$, on obtient

$$\iff (2\alpha\gamma + \beta^2)\mathrm{N}^2 + 2\beta\gamma\mathrm{N} + \gamma^2\mathrm{I}_3 = 2\mathrm{N}^2 + \mathrm{N} + \mathrm{I}_3$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha\gamma + \beta^2 = 2 \\ 2\beta\gamma = 1 \\ \gamma^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{7}{8} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \alpha = -\frac{7}{8} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

On trouve donc deux matrices B possibles (normal pour des racines carrées) :

$$\mathrm{B} = \frac{7}{8}\mathrm{N}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{N} + \mathrm{I}_3 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{B} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Commentaires : *Avec une matrice A triangulaire supérieure et la pseudo-stabilité des matrices triangulaires par produit, on aurait très bien chercher une matrice B sous la forme $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ telle que*

$$\mathrm{B}^2 = \mathrm{A} \iff \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta & 2\alpha\gamma + \beta^2 \\ 0 & \alpha^2 & 2\alpha\beta \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On aurait trouvé alors rapidement α puis les autres coefficients.

Exercice 10 (Puissances de matrice et binôme de Newton) :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

   (a) Montrer que B est nilpotente d'indice 3.

   (b) En déduire A^n pour tout entier n.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction :

1. (a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

   La matrice B est donc nilpotente d'indice 3.

   (b) Les matrices B et I_3 commutent donc le binôme de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = (B + I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k \\ &= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. **Première méthode :** Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Deuxième méthode : On a $A = I_3 + J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^2 = 0$.

   Donc $A^n = (J + I_3)^n = I_3 + nJ = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (Puissances de matrice et binôme de Newton bis) :

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que pour tout $k \in \mathrm{N}^*$, $J^k = n^{k-1} J$.

2. Pour $a, b \in \mathbb{K}$, on pose $V = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & b & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer V^n.

Correction :

1. Par récurrence $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = n^{k-1}J$.
2. On a $V = (a-b)I_n + bJ$. Comme les matrice I_n et J commutent, on peut utiliser le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
V^n &= \left(bJ + (a-b)I_n\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k (a-b)^{n-k} J^k \\
&= (a-b)^n I_n + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^k (a-b)^{n-k} n^{k-1} \right) J \\
&= (a-b)^n I_n + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (bn)^k \right) J \\
&= (a-b)^n I_n + \left(\frac{1}{n} \left((a-b) + nb\right)^n - \frac{(a-b)^n}{n} \right) J \\
&= (a-b)^n I_n + \frac{\left(a + (n-1)b\right)^n - (a-b)^n}{n} J.
\end{aligned}$$

Exercice 12 (($\star$) Puissances de matrice et binôme de Newton ter) :

1. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer N^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour $a \in \mathbb{K}$, on pose $T = \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ 0 & a & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Déterminer T^n.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit inversible.
   (c) Développer $\left(I_n + \frac{1}{a}N\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{a}N\right)^k$ et en déduire l'inverse de T en fonction des puissances de N.
3. Pour $a, b \in \mathbb{K}$, mêmes questions avec $S = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ 0 & a & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Correction :

Matrices

1. Par récurrence, on montre que la surdiagonale de 1 monte d'un cran à chaque puissance de N donc $\mathrm{N}^n = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$. N est nilpotente d'indice n.
2. Pour $a \in \mathbb{K}$, on pose $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ 0 & a & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Si $a = 0$, on retrouve la première question. On suppose dorénavant $a \neq 0$.

   Comme $\mathrm{T} = a\mathrm{I}_n + \mathrm{N}$ et que les matrices I_n et N commutent, le binôme de Newton s'écrit :

$$\mathrm{T}^n = (a\mathrm{I}_n + \mathrm{N})^n = a^n \left(\mathrm{I}_n + \frac{1}{a}\mathrm{N}\right)^n = a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{a^k}\mathrm{N}^k = a^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{1}{a^k}\mathrm{N}^k$$
$$= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \dots & \dots & \binom{n-1}{n}a \\ 0 & a^n & na^{n-1} & \dots & \binom{n-2}{n}a^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

   (b) D'après la question précédente, T^n est une matrice triangulaire supérieure donc inversible si, et seulement si $a \neq 0$.
   (c) Avec les polynômes annulateurs, on a déjà $\mathrm{T}^{-1} = \dfrac{1}{a^n}\mathrm{T}^{n-1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{1}{a^k}\mathrm{N}^{k-1}$.

   On peut faire mieux avec la formule de Bernoulli avec $\mathrm{T} - a\mathrm{I}_n = \mathrm{N}$ nilpotente :

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n^n + \left(\tfrac{1}{a}\mathrm{N}\right)^n = \underbrace{\left(\mathrm{I}_n + \tfrac{1}{a}\mathrm{N}\right)}_{=\frac{1}{a}\mathrm{T}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\tfrac{1}{a}\mathrm{N}\right)^k.$$
$$\mathrm{I}_n = \mathrm{T}.\frac{1}{a} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\tfrac{1}{a}\mathrm{N}\right)^k$$

   On trouve alors $\mathrm{T}^{-1} = \dfrac{1}{a} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\tfrac{1}{a}\mathrm{N}\right)^k$.
3. $\mathrm{S} = a\mathrm{I}_n + b\mathrm{N}$ avec $a\mathrm{I}_n$ et $b\mathrm{N}$ qui commutent encore.

$$\mathrm{S}^n = (a\mathrm{I}_n + b\mathrm{N})^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k\mathrm{N}^k = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} & \dots & \dots & \binom{n-1}{n}ab^{n-1} \\ 0 & a^n & nba^{n-1} & \dots & \binom{n-2}{n}a^2b^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a^n & nba^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

   Inversible si, et seulement si $a \neq 0$. Pour déterminer l'inverse, on écrit $\mathrm{I}_n = \frac{1}{a}\mathrm{S} - \frac{b}{a}\mathrm{N}$, d'où, avec la formule de Bernoulli :

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n^n + \left(\tfrac{b}{a}\mathrm{N}\right)^n = \underbrace{\left(\mathrm{I}_n + \tfrac{b}{a}\mathrm{N}\right)}_{=\frac{1}{a}\mathrm{S}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\tfrac{b}{a}\mathrm{N}\right)^k.$$
$$\mathrm{I}_n = \mathrm{S}.\frac{1}{a} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\tfrac{b}{a}\mathrm{N}\right)^k$$

On trouve alors $\mathrm{S}^{-1} = \dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{b}{a}\mathrm{N}\right)^k$.

III/ Compléments

Exercice 13 (Matrice de Vandermonde [1] des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité) :

Soit $\mathrm{V} = \left(v_{jk} = \omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant n}}$ où $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}$, $(n \geqslant 2)$.

1. Calculer $\mathrm{V}\overline{\mathrm{V}}$.
2. En déduire que V est inversible et donner son inverse.

Correction : Soient k et l deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant l \leqslant n$.

Le coefficient de W_{kl} de $k^{\text{ème}}$ ligne et de la $l^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{V}\overline{\mathrm{V}}$ est tel que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_{kl} &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{V}_{kj}\mathrm{V}_{jl} = \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)}\omega^{-(j-1)(l-1)}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega^{(j-1)(k-1-l+1)} = \sum_{j=1}^{n} \omega^{(j-1)(k-l)}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\omega^{(k-l)}\right)^{(j-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\omega^{(k-l)}\right)^{j}.
\end{aligned}$$

1$^{\text{er}}$ cas : Si $k = l$ alors $\mathrm{W}_{kl} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} 1 = n$.

2$^{\text{ème}}$ cas : Si $k \neq l$ alors remarquons tout d'abord que :

$$\begin{cases} 1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant n \end{cases} \implies \begin{cases} 1 \leqslant k \leqslant n \\ -n \leqslant -l \leqslant -1 \end{cases} \implies -(n-1) \leqslant k-l \leqslant n-1.$$

[1]. **Alexandre-Théophile Vandermonde** (parfois appelé Alexis-Théophile), né à Paris le 28 février **1735** et mort à Paris le 1er janvier **1796**, est un mathématicien français.

Il fut aussi économiste, musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne **Bézout** et Antoine **Lavoisier**. Son nom est maintenant surtout associé à une matrice et son déterminant utilisés en *interpolation polynomiale*.

Un cas particulier de matrice de Vandermonde apparaît dans la formule de la *transformée de **Fourier*** discrète, où les coefficients (α_i) sont les racines complexes de l'unité.

En notant $\omega_j = \omega^{j-1}$, la matrice V s'écrit :

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & {\omega_1}^2 & \dots & {\omega_1}^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & {\omega_2}^2 & \dots & {\omega_2}^{n-1} \\ 1 & \omega_3 & {\omega_3}^2 & \dots & {\omega_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n & {\omega_n}^2 & \dots & {\omega_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, pour tous j et k, $v_{jk} = {\omega_j}^{k-1}$.

L'entier $k-l$ ne peut donc être un multiple de n. Étant aussi non nul, on en déduit que $\omega^{k-l} \neq 1$.

Reconnaissant la somme des n premiers termes d'une suite géométriques de raison $\omega^{k-l} \neq 1$ et de premier terme 1, on a :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\omega^{k-l}\right)^j = \frac{1-\left(\omega^{k-l}\right)^n}{1-\omega} = \frac{1-1^{k-l}}{1-\omega} = 0.$$

En résumé, seuls les coefficients diagonaux de $\mathrm{V}\overline{\mathrm{V}}$ sont non nuls égaux à n *i.e.* $\mathrm{V}\overline{\mathrm{V}} = n\mathrm{I}_n$.

En particulier, après avoir vérifié que $\overline{\mathrm{V}}\mathrm{V} = n\mathrm{I}_n$, la matrice V est inversible d'inverse $\mathrm{V}^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{\mathrm{V}}$.

Exercice 14 : Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, on définit :

$$\exp(\mathrm{A}) = \sum_{i \geqslant 0} \frac{\mathrm{A}^i}{i!},$$

la somme étant finie et s'arrêtant par exemple au premier indice i tel que $\mathrm{A}^i = 0$.

1. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$.
2. En déduire que $\exp(\mathrm{A})$ est toujours inversible et calculer son inverse.

Correction :

1. Comme A et B commutent, on peut utiliser le binôme de Newton.

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) &= \sum_{0 \leqslant i} \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})^i}{i!} = \sum_{0 \leqslant i} \left(\frac{1}{i!} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \mathrm{A}^k\mathrm{B}^{i-k} \right) \\
&= \sum_{0 \leqslant k \leqslant i} \frac{1}{i!} \binom{i}{k} \mathrm{A}^k\mathrm{B}^{i-k} \\
&= \sum_{0 \leqslant k} \left(\sum_{k \leqslant i} \underbrace{\frac{1}{i!}\binom{i}{k}}_{=\frac{1}{k!(i-k)!}} \mathrm{A}^k\mathrm{B}^{i-k} \right) = \sum_{0 \leqslant}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{A}^k \sum_{k \leqslant i}^{n} \frac{1}{(i-k)!}\mathrm{B}^{i-k} \\
&= \sum_{0 \leqslant k}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{A}^k \sum_{0 \leqslant i}^{n-k} \frac{1}{i!}\mathrm{B}^i = \exp(\mathrm{B}) \sum_{0 \leqslant k}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{A}^k = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B}).
\end{aligned}$$

   Commentaires : *Rien de tout cela n'est possible si A et B ne commutent pas. Plus tard, vous montrez que la nilpotence n'est pas nécessaire. À notre niveau, nous en avons besoin ici pour maintenir les sommes finies et se permettre les interversions.*

2. Soit A nilpotente. Elle commute avec son opposée $-\mathrm{A}$ et on a :

$$\exp(\mathrm{A})\exp(-\mathrm{A}) = \exp(\mathrm{A}+(-\mathrm{A})) = \exp\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\right) = \mathrm{I}_n.$$

   Donc, $\exp(\mathrm{A})$ est inversible et $\exp(\mathrm{A})^{-1} = \exp(-\mathrm{A})$.