Nombres complexes II

1. Simplifier (factoriser) $\sqrt{a+1-2\sqrt{a}}+\sqrt{a+1+2\sqrt{a}}$.

$$\sqrt{\Big(\underbrace{\sqrt{a}}_{a\in\mathbb{R}_+}-1\Big)^2}+\sqrt{\Big(\underbrace{\sqrt{a}}_{a\in\mathbb{R}_+}+1\Big)^2}=\begin{cases}2 & \text{si } a\in[0\,;1]\\ 2\sqrt{a} & \text{si } a\in[1\,;+\infty[\,.\end{cases}$$

2. Déterminer l'ensemble des réels $x\in\mathbb{R}$ solutions de $6x^4-13x^3+12x^2-13x+6=0$.

Posons $\mathrm{X}=x+\dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}6x^4-13x^3+12x^2-13x+6&=x^2\left(6x^2-13x+12-13\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2\left(6\mathrm{X}^2-12-13\mathrm{X}+12\right)=x^2\left(6\mathrm{X}^2-13\mathrm{X}\right)\\&=x\mathrm{X}(6x\mathrm{X}-13x)\qquad(\text{On revient à } x)\\&=\left(x^2+1\right)\left(6x^2+6-13x\right)\\&=\left(x^2+1\right)(2x-3)(3x-2)\,.\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{3}{2},\dfrac{2}{3}\right\}$.

3. Donner, avec ou sans calculs, les racines quatrièmes de l'unité.

1, $\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, $\overline{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ et $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

4. Déterminer les racines quatrièmes de $\sqrt{8}+\mathrm{i}\sqrt{8}$. On les donnera sous leur forme exponentielle.

$\sqrt{8}+\mathrm{i}\sqrt{8}=4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ donc ses racines quatrièmes sont

$$\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{16}},\ -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{16}}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{15\pi}{16}},\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{16}}\,\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{16}}\ \text{et}\ -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{16}}\,\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{16}}\,.$$

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2-(1-\mathrm{i})z-\mathrm{i}=0$.

Point besoin de discriminant ici car 1 est racine *i.e.* $z^2-(1-\mathrm{i})z-\mathrm{i}=(z-1)(z+\mathrm{i})$ et la deuxième racine qui s'en suit.

En l'absence de racines évidentes, $\Delta=(1-\mathrm{i})^2+4\,\mathrm{i}=2\,\mathrm{i}=\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^2$ puis

$$z_1=\frac{1-\mathrm{i}+\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2}=1\quad\text{et}\quad z_1=\frac{1-\mathrm{i}-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2}=-\mathrm{i}\,.$$

6. Trouver tous les couples $(z\,;z')\in\mathbb{C}^2$ tels que $\begin{cases}z+z' & =1-\mathrm{i}\\ zz' & =-\mathrm{i}\end{cases}$

z et z' sont les racines du polynôme polynômes précédent.

Les couples cherchés sont donc $(1\,;-\mathrm{i})$ et $(-\mathrm{i}\,;1)$.

7. En posant $u = \sin(x)$ déterminer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{3+\cos^2(x)}$ sur $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

   Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $3+\cos^2(x) \neq 0$ donc $\dfrac{\cos(x)}{3+\cos^2(x)}$ est continue sur I.

   Avec $u = \sin(x)$, on a $\mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x$ et $3+\cos^2(x) = 4-u^2$ puis

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \int^x \frac{\cos(x)}{3+\cos^2(x)} = \int^u \frac{\mathrm{d}u}{4-u^2} = \frac{1}{4}\ln\left(\left|\frac{u+2}{u-2}\right|\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\left|\frac{\sin(x)+2}{\sin(x)-2}\right|\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\sin(x)}{2-\sin(x)}\right).$$

Nombres complexes II

1. Simplifier (factoriser) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.

$$\sqrt{\underbrace{\Big(\underbrace{\sqrt{a-1}}_{a\geqslant 1}+1\Big)^2}_{\geqslant 0}}+\sqrt{\Big(\underbrace{\sqrt{a-1}}_{a\geqslant 1}-1\Big)^2}=\begin{cases}2\sqrt{a-1} & \text{si } a\in[2\,;+\infty[\\ 2 & \text{si } a\in[1\,;2]\,.\end{cases}$$

2. Déterminer l'ensemble des réels $x\in\mathbb{R}$ solutions de $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$.

Posons $\mathrm{X}=x+\dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}x^4+3x^3+4x^2+3x+1&=x^2\left(x^2+3x+4+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2\left(\mathrm{X}^2-2+3\mathrm{X}+4\right)=x^2\left(\mathrm{X}^2+3\mathrm{X}+2\right)\\&=x\left(\mathrm{X}+1\right)x\left(\mathrm{X}+2\right)\\&=(x^2+x+1)(x^2+2x+1)\qquad\text{(On revient à } x)\\&=(x^2+x+1)(x+1)^2.\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S}=\{-1\}$.

3. Donner, avec ou sans calculs, les racines troisièmes de l'unité.

1, $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $\overline{\mathrm{j}}=\mathrm{j}^2=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

4. Déterminer les racines cubiques de $-4+4\,\mathrm{i}\sqrt{3}$. On les donnera sous leur forme exponentielle.

$-4+4\,\mathrm{i}\sqrt{3}=8\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ donc ses racines cubiques sont $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{9}}$, $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{9}}\,\mathrm{j}=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{9}}$ et $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{9}}\,\mathrm{j}^2=2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\mathrm{i}\pi}{9}}$.

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2+(1-\mathrm{i})z-\mathrm{i}=0$.

Point besoin de discriminant ici car -1 est racine *i.e.* $z^2+(1-\mathrm{i})z-\mathrm{i}=(z+1)(z-\mathrm{i})$ et la deuxième racine qui s'en suit.

En l'absence de racines évidentes, $\Delta=(1-\mathrm{i})^2+4\,\mathrm{i}=2\,\mathrm{i}=\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^2$ puis

$$z_1=\frac{\mathrm{i}-1+\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2}=\mathrm{i}\qquad\text{et}\qquad z_1=\frac{\mathrm{i}-1-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2}=-1.$$

6. Trouver tous les couples $(z\,;z')\in\mathbb{C}^2$ tels que $\begin{cases}z+z' & =\mathrm{i}-1\\ zz' & =-\mathrm{i}\end{cases}$

z et z' sont les racines du polynôme précédent.

Les couples cherchés sont donc $(-1\,;\mathrm{i})$ et $(\mathrm{i}\,;-1)$.

7. En posant $u = \tan(x)$ déterminer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^4(x)}$ sur $\mathrm{I} \subset \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\cos(x) \neq 0$ donc $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^4(x)}$ est continue sur I.

   Avec $u = \tan(x)$, on a $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ et $\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + u^2$ puis

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \int^x \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4(x)} = \int^u \frac{1}{\cos^2(x)} \times \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} = \int^u (1+u^2)\,\mathrm{d}u = u + \frac{1}{3}u^3 = \tan(x) + \frac{1}{3}\tan^3(x).$$