Suites

I/ Suites de référence et généralités

Exercice 1 : Montrer que :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$ est majorée par 2.
2. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\sqrt{1+n^2}}{n}$ vérifie $1 < u_n < 1 + \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
3. la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n^2+(-1)^n}{n+1}$ est minorée par 0.
4. la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est minorée par 0 et majorée par 1.
5. la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_0 = -\sqrt{2}$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+1} = \dfrac{1}{4}t_n - 2$ est minorée par -3 et majorée par -1.
6. la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ par $r_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2n+2k-1}$ est bornée.
7. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ vérifie $1 < u_n \leqslant 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 - n + 2$
2. $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = w_n - n \end{cases}$
3. $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
4. $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
5. $\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_{n+1} = (n^2+1)\alpha_n \end{cases}$
6. $k_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
7. $e_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$.

Exercice 3 : On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.
2. Étudier la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire l'éventuelle convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Étudier le sens de variation de la suite finie $\left(\dbinom{n}{k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$. En déduire $\max\left\{\dbinom{n}{k}, k \in [\![0\,;n]\!]\right\}$.

Exercice 5 : Déterminer la forme explicite des suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$

Exercice 6 : On considère la suite définie par la récurrence

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 4n + 3.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \alpha n$.

1. Déterminer α afin que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite arithmético-géométrique.
2. Expliciter u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 & = 0 \\ z_{n+1} & = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\, z_n + 5. \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n. On considère le nombre complexe $z_{\mathrm{A}} = 4 + 2\,\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_{A}.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_{\mathrm{A}}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i} \times u_n$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = -\left(\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n (4 + 2\,\mathrm{i})$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

II/ Comportement asymptotique

Exercice 8 :

1. Trouver une suite non majorée qui ne tende pas vers $+\infty$.
2. Trouver une suite non croissante tendant vers $+\infty$.
3. Trouver une suite divergente qui ne tende ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.

Exercice 9 :

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Suites

Exercice 10 : On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)! \geqslant 2^n$.
2. En déduire que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
3. Conclure quant à la convergence de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11 (Exercice de BAC) : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [1\,;3] \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n} \end{cases}$$

1. (a) Démontrer, par récurrence, que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à l'intervalle $[1\,;3]$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On conjecture que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 3, donc on étudie la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = 3 - u_n.$$
   (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{3}} v_n$.
   (b) Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\, v_n.$$
   (c) Montrer, par récurrence, que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 12 : Pour chacune des suites dont on donne le terme général, étudier la convergence, et donner la limite lorsqu'elle existe.

On supposera $n \geqslant 1$ chaque fois que nécessaire.

1. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$
2. $u_n = n + \sin(n)$
3. $u_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{2n}$.
4. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$
5. $v_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$
6. $w_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$
7. $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$
8. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$
9. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$
10. $u_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}$
11. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
12. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$
13. $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n+(-1)^{n+1}}$
14. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
15. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$
16. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 13 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de limite ℓ. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$.

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geqslant \dfrac{v_n + u_n}{2}$.
3. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 14 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)$ avec $0 < a < 1$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$.
3. En déduire que la suite est convergente.

Exercice 15 : Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

1. $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3\,;3+\frac{1}{n^2}\right[$.
2. $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2-\frac{1}{n}\,;4+n^2\right]$.
3. $\mathrm{I}_3 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}\,;2+\frac{1}{n}\right[$.
4. $\mathrm{I}_4 = \displaystyle\bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1+\frac{1}{n}\,;n\right]$.

Exercice 16 (Constante d'Euler – À faire absolument) : On considère la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. (a) En déduire la limite de $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Justifier que $\dfrac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

   On dit que H_n est équivalent à $\ln(n)$ et on note $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

   (c) Montrer que la suite $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, par $\mathrm{K}_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$ est convergente.

   Sa limite, notée γ, est appelée constante d'Euler.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par encadrement, déterminer la la nature des suites de terme général :

   (a) $\mathrm{R}_{n,k} = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$ (pour $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ fixé).

   (b) $\mathrm{B}_n = \displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p\ln p}$.

Exercice 17 (Suite de racines) :

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sum_{k=0}^{n} x^k = 2$ admet une unique racine positive notée r_n.
2. Montrer que (r_n) converge et déterminer sa limite ℓ.

Exercice 18 (Lemme de Fekete) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que :

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{m+n} \leqslant u_m + u_n.$$

1. (a) Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{qp} \leqslant q u_p$.
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer qu'il existe une constante M telle que $\forall\, n \geqslant p$, $\dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{u_p}{p} + \dfrac{\mathrm{M}}{n}$.
   On pourra utiliser la division euclidienne.
2. Montrer que $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers sa borne inférieure dont on justifiera l'existence.

III/ Suites adjacentes

Exercice 19 : Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

Exercice 20 (Séries alternées) :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissant vers 0. On définit $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k.$$

   (a) Montrer que les suites extraites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
   (b) En déduire que $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite S.
   (c) Donner un encadrement de sa limite et montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|\mathrm{S} - \mathrm{S}_n| \leqslant u_{n+1}$.
2. **Application :** Déterminer la nature de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathrm{H}'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Exercice 21 :

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n(n!)}$ sont adjacentes.
2. (a) On pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$. Calculer I_0 et montrer que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (b) Montrer que $\mathrm{I}_{k-1} - \mathrm{I}_k = \dfrac{1}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   (c) En déduire que $u_n = \mathrm{e} - \mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
3. En déduire que e est irrationnel.

Exercice 22 (Moyenne arithmético-géométrique) : Soient $0 \leqslant b \leqslant a$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

On admettra (ou on démontrera) que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies avec $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ pour tout entier n.

1. Démontrer que pour tous réels positifs x et y, on a
$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$
2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1, u_n \geqslant v_n, u_n \geqslant u_{n+1}$ et $v_{n+1} \geqslant v_n$.
3. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - v_n)$.
4. Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $\mathrm{M}(a, b)$.
5. Écrire une fonction Python nommée `moyenne(a,b,ecart)` qui donne un encadrement de $\mathrm{M}(a, b)$, avec une amplitude inférieure ou égale à `ecart`.