Suites

I/ Suites de référence et généralités

Exercice 1 : Montrer que :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$ est majorée par 2.
2. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\sqrt{1+n^2}}{n}$ vérifie $1 < u_n < 1 + \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
3. la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n^2+(-1)^n}{n+1}$ est minorée par 0.
4. la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est minorée par 0 et majorée par 1.
5. la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_0 = -\sqrt{2}$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+1} = \dfrac{1}{4}t_n - 2$ est minorée par -3 et majorée par -1.
6. la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ par $r_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1}$ est bornée.
7. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ vérifie $1 < u_n \leqslant 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 - n + 2$
2. $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = w_n - n \end{cases}$
3. $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
4. $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
5. $\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_{n+1} = (n^2+1)\alpha_n \end{cases}$
6. $k_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
7. $e_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$.

Correction :

1. La fonction $t \longmapsto t^2 - n + 2$ est croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right]$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir de $n = 1$.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = -n < 0$ donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{n+1} - \mathrm{H}_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ donc $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2}{3} < 1$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \neq 0$ à montrer par récurrence $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = n^2 + 1 \geqslant 1$ donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \neq 0$ et $\dfrac{k_{n+1}}{k_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n < 1$ donc $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $e_n \neq 0$ et $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \dfrac{2}{n+1}$ donc $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 1$.

Exercice 3 : On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.
2. Étudier la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire l'éventuelle convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction :

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $0 < v_0 = 1 < 3$ et, en supposant $0 < v_n < 3$, on a :

$$0 < 3 < 6 - v_n < 6 \implies \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3} \implies 0 < \frac{3}{2} = \frac{9}{6} < v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} = 3.$$

2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{9}{6 - v_n} - v_n = \dfrac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

   D'après la question précédente, $6 - v_n > 0$ dont $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée donc elle converge vers une limite $\ell \leqslant 3$.

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Étudier le sens de variation de la suite finie $\left(\dbinom{n}{k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$. En déduire $\max\left\{\dbinom{n}{k}, k \in [\![0\,;n]\!]\right\}$.

Correction : Tous les termes de la suite $\left(\dbinom{n}{k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont strictement positifs donc

$$\forall\, k \leqslant n,\ \frac{\dbinom{n}{k+1}}{\dbinom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}.$$

La suite est donc croissante pour $n - k \geqslant k + 1 \iff k \leqslant \dfrac{n-1}{2}$ puis décroissante.

On en déduit que $\max\left\{\dbinom{n}{k}, k \in [\![0\,;n]\!]\right\} = \begin{cases} \dbinom{2p}{p-1} & \text{si } n = 2p \\ \dbinom{2p}{p} & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$

Exercice 5 : Déterminer la forme explicite des suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$

Correction :

1. Cette suite est arithmético-géométrique.

   On détermine λ tel que $\lambda = 3\lambda + 2$, et on trouve $\lambda = -1$.

   La suite $(u_n - \lambda)$ est géométrique de raison 3.

   D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n - \lambda = 3^n(u_0 - \lambda)$.

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 1.$$

2. Cette suite est aussi arithmético-géométrique.

   On détermine λ tel que $\lambda = \dfrac{1}{3}\lambda + 2$, et on trouve $\lambda = 3$.

   La suite $(u_n - \lambda)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

   D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n - \lambda = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (u_0 - \lambda)$.

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 3 - \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Exercice 6 : On considère la suite définie par la récurrence

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 4n + 3.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \alpha n$.

1. Déterminer α afin que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite arithmético-géométrique.
2. Expliciter u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1. Raisonnons par analyse-synthèse.

   Si un tel α existe alors $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1) = 2u_n + \alpha n - 4n + \alpha + 3$.
   $\phantom{Si un tel \alpha existe alors v_{n+1}} = 2\,(u_n + \alpha n) - n(4+\alpha) + \alpha + 3$

   Nécessairement, $\alpha = -4$.

   Réciproquement ou dans la synthèse, on vérifie qu'alors $v_{n+1} = 2v_n - 1$ *i.e.* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

Suites

2. La suite est classique, l'équation $x = 2x - 1$ admet 1 comme unique solution et la suite $(v_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 - 1 = -1$.

   On en déduit, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2^n + 1$ et $u_n = -2^n - 4n + 1$.

Exercice 7 : On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\, z_n + 5. \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n. On considère le nombre complexe $z_\mathrm{A} = 4 + 2\,\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_\mathrm{A}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i} \times u_n$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = -\left(\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n (4 + 2\,\mathrm{i})$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Correction :

1. (a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = z_{n+1} - 4 - 2\,\mathrm{i} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\, z_n + 1 - 2\,\mathrm{i}$.

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\, z_n - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,(2\,\mathrm{i} + 4) = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,(z_n - z_\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{i} \times u_n$$

   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$ et de premier terme $u_0 = z_0 - z_\mathrm{A} = -z_\mathrm{A}$.

   Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\left(\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n (4 + 2\,\mathrm{i})$.

2. Il suffit de montrer que $\dfrac{z_{n+4} - z_n}{z_n - z_\mathrm{A}} \in \mathbb{R}$ avec

$$z_n = u_n + z_\mathrm{A} = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n\right)(4 + 2\,\mathrm{i}) \text{ et } z_{n+4} = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^{n+4}\right)(4 + 2\,\mathrm{i}) = \left(1 - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n\right)(4 + 2\,\mathrm{i}).$$

D'où,
$$\frac{z_{n+4} - z_n}{z_n - z_\mathrm{A}} = \frac{\left(-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n\right)(4 + 2\,\mathrm{i})}{-\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n (4 + 2\,\mathrm{i})} = \frac{-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n}{-\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n} = -\frac{15}{16} \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les points A, M_n et M_{n+4} sont donc alignés.

II/ Comportement asymptotique

Exercice 8 :

1. Trouver une suite non majorée qui ne tende pas vers $+\infty$.
2. Trouver une suite non croissante tendant vers $+\infty$.
3. Trouver une suite divergente qui ne tende ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.

Correction :

1. La suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = [1+(-1)^n]n$ convient. Faites un schéma !
2. Considérer $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_n = n+(-1)^n$. Faites un schéma !
3. La suite $((-1)^n)$ diverge.

   Or, elle est bornée, donc ne tend ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.

Exercice 9 :

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Correction : Tout repose sur une décomposition en éléments simples et les sommes télescopiques :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Commentaires : *Vous montrerez plus tard et par bien des méthodes que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 10 : On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $e_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)! \geqslant 2^n$.
2. En déduire que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
3. Conclure quant à la convergence de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : On montrera ultérieurement que cette suite converge vers e.

Correction :

1. $(n+1)! = 1 \times \underbrace{2 \times 3 \times \ldots \times n \times (n+1)}_{n \text{ facteurs } \geqslant 2} \geqslant 2^n$.

2. $e_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \leqslant 3.$

   La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée.
3. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement croissante, majorée, elle converge vers une limite inférieure à 3.

Exercice 11 (Exercice de BAC) : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [1\,;3] \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n} \end{cases}$$

1. (a) Démontrer, par récurrence, que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à l'intervalle $[1\,;3]$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On conjecture que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 3, donc on étudie la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = 3 - u_n.$$

   (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{3}} v_n$.
   (b) Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} v_n.$$

   (c) Montrer, par récurrence, que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Correction :

1. (a) Par récurrence, en n'oubliant pas de préciser la croissance de $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[1\,;9]$.
   (b) Les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant tous strictement positifs d'après la question précédente,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{3}{u_n}} \geqslant 1 \text{ avec } u_n \leqslant 3.$$

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
   (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \leqslant 3$.
2. (a) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 3 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{3u_n} = \dfrac{9-3u_n}{3+\sqrt{3u_n}} = \dfrac{3}{3+\sqrt{3u_n}}(3-u_n) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{3}} v_n.$
   (b) Comme $1 \leqslant u_n$, $1 \leqslant \sqrt{u_n}$, le reste est affaire de minoration du dénominateur :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} v_n.$$

Suites

(c) Par récurrence, on a $v_0 \in [0\,;1]$ et $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^0 = 2 \geqslant 1$ donc la propriété est initialisée.

Supposant un certain $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant v_n \leqslant 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$, on a :

$$0 \leqslant v_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} v_n \leqslant \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \times 2\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^{n+1}.$$

La propriété est donc héréditaire et vraie, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Comme $\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} < 1$, d'après le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ d'après le théorème sur les limites de sommes.

Exercice 12 : Pour chacune des suites dont on donne le terme général, étudier la convergence, et donner la limite lorsqu'elle existe.

On supposera $n \geqslant 1$ chaque fois que nécessaire.

1. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$
2. $u_n = n + \sin(n)$
3. $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{2n}$.
4. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$
5. $v_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$
6. $w_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$
7. $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$
8. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$
9. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$
10. $u_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}$
11. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
12. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$
13. $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n+(-1)^{n+1}}$
14. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
15. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$
16. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Correction :

1. On a :
   — $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|\cos n| \leqslant 1$, donc $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ (en divisant par $n > 0$)
   — $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

   D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. $n - 1 \leqslant n + \sin(n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ dans le théorème de comparaison.
3. $\dfrac{3n-1}{2n} \leqslant \dfrac{3n+(-1)^n}{2n} \leqslant \dfrac{3n+1}{2n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ d'après le théorème d'encadrement.

Suites

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\forall\, k \in [\![1,n]\!], \quad & 2 \leqslant 2k \leqslant 2n \\ \text{donc } & n^2+2 \leqslant n^2+2k \leqslant n^2+2n \\ \text{donc } & 0 < \sqrt{n^2+2} \leqslant \sqrt{n^2+2k} \leqslant \sqrt{n^2+2n} \text{ car la fonction racine est croissante} \\ \text{donc } & \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\end{aligned}$$

En additionnant, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$$

C'est-à-dire

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \leqslant v_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$$

On a :

— $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, \quad \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

— $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}} = \dfrac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

— $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}} = \dfrac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

5. Par définition de la partie entière, $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$ d'où, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x - \dfrac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = x$ d'après le théorème d'encadrement.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\forall\, k \in [\![1,n]\!], \quad kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} (kx-1) < \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx$$

i.e.

$$\frac{n(n+1)}{2}x - n < \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leqslant \frac{n(n+1)}{2}x$$

En divisant par $n > 0$:

$$\frac{(n+1)}{2n}x - \frac{1}{n} < w_n \leqslant \frac{(n+1)}{2n}x$$

On a :

— $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, \quad \dfrac{(n+1)}{2n}x - \dfrac{1}{n} < w_n \leqslant \dfrac{(n+1)}{2n}x$

— $\dfrac{(n+1)}{2n}x - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{2} - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{x}{2}$

— $\dfrac{(n+1)}{2n}x = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{x}{2}$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{x}{2}$.

7. On a :

$$\begin{aligned} p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right) &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right) \\ &= 1+\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\right)+\cdots \\ &\geqslant 1+\frac{1+2+\cdots+n}{n} \\ &\geqslant 1+\frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{n+1}{2}\right)=+\infty$.

D'après le théorème de comparaison, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=+\infty$.

8. Très pénible à étudier avec sa somme à nombre de termes variable, mais si on ne veut que la limite, c'est beaucoup plus facile.

Chacun des termes de la somme est compris entre le plus petit, en l'occurrence $\dfrac{1}{(2n)^2}$, et le plus grand, à savoir $\dfrac{1}{(n+1)^2}$, donc

$$\frac{n}{2n^2}\leqslant u_n\leqslant\frac{n}{n+1)^2}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

9. $\dfrac{n}{n+1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+n}\leqslant u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=\frac{n}{n}=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$ d'après le théorème d'encadrement.

10. $u_n=\dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}=-\dfrac{1}{\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

11. $0<u_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\leqslant\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

12. $u_n=\sqrt[n]{n^2}=\mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ d'après les théorèmes de croissances comparées.

13. $-\dfrac{1}{n-1}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{n-1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ d'après le théorème d'encadrement.

14. $0<u_n=\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1}{n}\times\underbrace{\left(\dfrac{2}{n}\times\dfrac{3}{n}\times\ldots\times\dfrac{n}{n}\right)}_{\leqslant 1}\leqslant\dfrac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

15. $\dfrac{1}{2n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+n^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ d'après le théorème d'encadrement.

16. $\sqrt{n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ d'après le théorème de comparaison.

Suites

Exercice 13 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de limite ℓ. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$.

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geqslant \dfrac{v_n + u_n}{2}$.
3. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Correction :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} u_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{1}{n+1}\, u_{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) u_i \\ &= \frac{1}{n+1}\, u_{n+1} - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} u_i \end{aligned}$$
La suite étant croissante, $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $u_i \leqslant u_{n+1}$, d'où
$$\geqslant \frac{1}{n+1}\, u_{n+1} - \frac{1}{n+1}\, u_{n+1} = 0.$$
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} u_i = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=n+1}^{2n} u_i\right)$.

   De même que précédemment, $\forall\, i \in [\![n+1\,;2n]\!]$, $u_i \geqslant u_n$. On obtient :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_{2n} \geqslant \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2n-(n+1)+1}{n}\, u_n\right) = \frac{v_n + u_n}{2}.$$
3. Par définition, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_n = u_n \leqslant \ell$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, croissante et majorée par ℓ, est convergente vers une limite ℓ' inférieure à ℓ.

   Il suffit alors de passer à la limite dans l'inégalité précédente. On aura :
$$\ell' \geqslant \frac{\ell' + \ell}{2} \implies \ell' \geqslant \ell.$$
   Par double inégalité, on en déduit que $\ell' = \ell$ *i.e.* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 14 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (1+a)\,(1+a^2)\cdots(1+a^n)$ avec $0 < a < 1$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$.
3. En déduire que la suite est convergente.

Correction :

1. Tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + a^{n+1} > 1$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. On étudie la fonction $\varphi : x \longmapsto \mathrm{e}^x - x - 1$ et on montre qu'elle ne prend que des valeurs positives ou on invoque la convexité de la fonction exponentielle. Sa courbe est donc au-dessus de ses tangentes, en particulier celle en 0 d'équation $y = x + 1$.
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x.$$
3. D'après la question précédente, en remarquant que $1 + a^0 = 2$,
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 2u_n \leqslant \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{a^k} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) = \exp\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right) \leqslant \exp\left(\frac{1}{1-a}\right).$$
On en déduit, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, croissante, est majorée donc convergente.

Exercice 15 : Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

1. $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3\,;3 + \frac{1}{n^2}\right[$.
2. $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2 - \frac{1}{n}\,;4 + n^2\right]$.
3. $\mathrm{I}_3 = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}\,;2 + \frac{1}{n}\right[$.
4. $\mathrm{I}_4 = \displaystyle\bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}\,;n\right]$.

Correction :

1. Montrons, par double inclusion que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3\,;3 + \frac{1}{n^2}\right[= \{3\}$.

   Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} > 0$ il est déjà clair que $\{3\} \subset \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3\,;3 + \frac{1}{n^2}\right[$.

   Réciproquement, par définition de $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3\,;3 + \frac{1}{n^2}\right[$, $x \in \mathrm{I}_1 \iff \forall\, n \in \mathbb{N}^*, 3 \leqslant x < 3 + \dfrac{1}{n^2}$.

   Par passage à la limite, on obtient $x = 3$ et $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3\,;3 + \frac{1}{n^2}\right[\subset \{3\}$.

   Donc $\mathrm{I}_1 = \{3\}$.
2. $\mathrm{I}_2 = [-2\,;5]$.
3. $\mathrm{I}_3 = [0\,;2]$.
4. Montrons que $\mathrm{I}_4 =]1\,;+\infty[$ par double inclusion.

   Soit $x \in]1\,;+\infty[$. Le côté archimédien de $\mathbb{R}$ nous assure l'existence d'un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \leqslant n_0$ ou encore $x < n_0 = \lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$.

Suites

Par convergence de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0, il existe $n_1(x)$ tel que $\forall\, n \geqslant n_1$,

$$\frac{1}{n} < \frac{x-1}{2} \implies 1 + \frac{1}{n} = \frac{1+x}{2} < x.$$

Pour $n \geqslant \max\left(n_0\,;n_1\right)$, $x \in \left[1+\frac{1}{n}\,;n\right] \subset \bigcup_{n=2}^{+\infty}\left[1+\frac{1}{n}\,;n\right]$.

Comme $\frac{1}{n} > 0$, $\forall\, n \geqslant 2$, $\left[1+\frac{1}{n}\,;n\right] \subset \left]1\,;+\infty\right[$, l'inclusion réciproque est vraie.

Conclusion, $\mathrm{I}_4 = \bigcup_{n=2}^{+\infty}\left[1+\frac{1}{n}\,;n\right] = \left]1\,;+\infty\right[$.

Exercice 16 (Constante d'Euler – À faire absolument) : On considère la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. (a) En déduire la limite de $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Justifier que $\frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

   On dit que H_n est équivalent à $\ln(n)$ et on note $\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

   (c) Montrer que la suite $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, par $\mathrm{K}_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$ est convergente.

   Sa limite, notée γ, est appelée constante d'Euler.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par encadrement, déterminer la la nature des suites de terme général :

   (a) $\mathrm{R}_{n,k} = \sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}$ (pour $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ fixé). (b) $\mathrm{B}_n = \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p\ln p}$.

Correction :

1. Plein de méthodes pour montrer cet encadrement classique dont la plus simple est d'étudier la fonction $\varphi : \ln(1+x) - x$ pour montrer, soit par convexité soit par l'étude du signe, que,

$$\forall\, x \in \left]-1\,;+\infty\right[,\ \ln(1+x) \leqslant x.$$

Commentaires : *La courbe de $x \longmapsto \ln(1+x)$ est sous sa tangente en 0 d'équation $y = x$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a alors

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} \iff \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} \iff \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

Mais aussi, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $-\dfrac{1}{x+1} \in]-1\,;+\infty[$ et on a,

$$\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right) \leqslant -\frac{1}{x+1} \iff \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \leqslant -\frac{1}{x+1} \iff \ln(x)-\ln(x+1) \leqslant -\frac{1}{x+1}$$
$$\iff \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1)-\ln(x).$$

Conclusion,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{x+1} < \ln(x+1)-\ln(x) < \frac{1}{x} \qquad \text{(XIII.1)}$$

Commentaires : *À savoir refaire.*

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'encadrement précédent, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} \in \mathbb{R}_+^*$ et on a :
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$
En sommant pour $k \in [\![1\,;n]\!]$,
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
$$\mathrm{H}_n-1 \leqslant \mathrm{H}_n-1+\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1)-\ln(1) \leqslant \mathrm{H}_n$$
$$\mathrm{H}_n-1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant \mathrm{H}_n$$

On en déduit que,
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant \ln(n)+1. \qquad \text{(XIII.2)}$$

3. (a) Comme $\lim\limits_{n+\infty}\ln(n+1)=+\infty$, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{H}_n=+\infty$.

   (b) Reprenons l'encadrement (XIII.2) et $n \geqslant 2$,
$$\ln(n+1) \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant \ln(n)+1.$$
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \leqslant 1+\frac{1}{\ln(n)}$$
$$\frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \leqslant \frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \leqslant 1+\frac{1}{\ln(n)}$$
$$1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \leqslant 1+\frac{1}{\ln(n)}$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\ln(n)}=0$, d'après le théorème d'encadrement,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)}=1.$$

   (c) Commençons par regarder les variations de $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{K}_{n+1}-\mathrm{K}_n=\frac{1}{n+1}-\underbrace{\Big(\ln(n+1)-\ln(n)\Big)}_{\geqslant\frac{1}{n+1}\text{ d'après (XIII.1)}} \leqslant 0.$$
   La suite $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

   En reprenant encore l'encadrement (XIII.2) et par croissance de la fonction $\ln$, on a :
$$\ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \mathrm{H}_n-\ln(n) \iff 0 \leqslant \mathrm{K}_n.$$
   La suite $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante et minorée, est convergente d'après le théorème de convergence monotone.

Suites

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. C'est encore l'encadrement (XIII.1) :
   (a) Pour $p \leqslant n+1$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ fixé, on a :
$$\frac{1}{p+1} \leqslant \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p}$$
En sommant pour $p \in [\![n+1\,;kn]\!]$,
$$\begin{aligned}\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p+1} &\leqslant \sum_{p=n+1}^{kn} \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}\\ \mathrm{R}_{n,k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{kn+1} &\leqslant \ln(kn+1) - \ln(n+1) \leqslant \mathrm{R}_{n,k}\\ \mathrm{R}_{n,k} - \frac{1}{n+1} &\leqslant \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) \leqslant \mathrm{R}_{n,k}\\ \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) &\leqslant \mathrm{R}_{n,k} \leqslant \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) = \ln(k)$, d'après le théorème d'encadrement, $(\mathrm{R}_{n,k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et on a :
$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{R}_{n,k} = \ln(k).$$
   (b) De même, pour $\geqslant 2$,
$$\begin{aligned}\ln(p+1) - \ln(p) &\leqslant \frac{1}{p}\\ \frac{\ln(p+1)}{\ln(p)} - 1 &\leqslant \frac{1}{p\ln(p)}\\ \ln(p+1) - \ln(p) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) &\leqslant \frac{1}{p\ln(p)}\end{aligned}$$
En sommant pour $p \in [\![2\,;n]\!]$,
$$\begin{aligned}\sum_{p=2}^{n} \ln(p+1) - \ln(p) &\leqslant \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p\ln(p)}\\ \ln(n+1) - \ln(2) &\leqslant \mathrm{B}_n\\ \mathrm{R}_{n,k} - \frac{1}{n+1} &\leqslant \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) \leqslant \mathrm{R}_{n,k}\\ \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) &\leqslant \mathrm{R}_{n,k} \leqslant \ln\left(k - \frac{k-1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$
D'après le théorème de comparaison, la suite $(\mathrm{B}_n)_{\substack{n \in \mathbb{N}\\ n \geqslant 2}}$ est donc divergente et on a :
$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{B}_n = +\infty.$$

Exercice 17 (Suite de racines) :

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = 2$ admet une unique racine positive notée r_n.
2. Montrer que (r_n) converge et déterminer sa limite ℓ.

Correction :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} > 0.$$

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel strictement positif r_n tel que $f(r_n) = 2$.

2. Par définition, $f_n(r_n) = \sum_{k=0}^{n} r_n^k = \sum_{k=0}^{n-1} r_n^k + r_n^n$

$$2 = f_{n-1}(r_n) + r_n^n$$
$$2 = f_{n-1}(r_{n-1})$$

En soustrayant les deux dernières équations, on obtient :

$$f_{n-1}(r_n) - f_{n-1}(r_{n-1}) = -r_n^n < 0.$$

Donc $f_{n-1}(r_n) < f_{n-1}(r_{n-1})$ et, par stricte croissance de f_{n-1}, $r_n < r_{n-1}$, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement décroissante. Minorée, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.

Comme $r_1 = 1$ et que la suite est strictement décroissante, $\forall\, n \geqslant 2$, $0 < r_n < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 1 - r_n^n = 1$.

On a alors, en passant à la limite :

$$\frac{1}{1-\ell} = 2 \iff \ell = \frac{1}{2}.$$

La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 18 (Lemme de Fekete) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que :

$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{m+n} \leqslant u_m + u_n.$$

1. (a) Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{qp} \leqslant qu_p$.

   (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer qu'il existe une constante M telle que $\forall\, n \geqslant p$, $\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_p}{p} + \frac{\mathrm{M}}{n}$.

   On pourra utiliser la division euclidienne.

2. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers sa borne inférieure dont on justifiera l'existence.

Correction :

1. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Par récurrence sur $q \in \mathbb{N}^*$:

   Pour $q = 1$, c'est évident.

Supposons le résultat établi pour $q \in \mathbb{N}^*$.

Alors $u_{(q+1)p} \leqslant u_{qp} + u_p \leqslant (q+1)u_p$.

La propriété est donc vraie pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.

(b) Il existe un unique couple $(q\,;r) \in \mathbb{N}$ tel que $n = pq + r$ et $0 \leqslant r < p$.

D'où, $\dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{u_{pq}}{n} + \dfrac{u_r}{n} \leqslant \dfrac{qu_p}{n} + \dfrac{u_r}{n}$.

Posons $\mathrm{M} = \max\limits_{k\in[\![1;p-1]\!]} u_k$ et remarquons que $\dfrac{q}{n} = \dfrac{q}{pq+r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{r}{p(pq+r)} \leqslant \dfrac{1}{p}$.

On en déduit que $\dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{u_p}{p} + \dfrac{\mathrm{M}}{n}$.

2. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. Elle admet donc une borne inférieure.

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{u_n}{n}\right)$.

Par définition de $\ell = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{u_n}{n}\right)$, on a déjà, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\ell \leqslant \dfrac{u_n}{n}$.

Et, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists\, p \in \mathbb{N}^*$, tel que $\dfrac{u_p}{p} \leqslant \ell + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Par convergence de $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 0, il existe $n_0\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ tel que $n \geqslant n_0 \implies \dfrac{\mathrm{M}}{n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, $\forall\, n \geqslant n_0$, $\ell \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{u_p}{p} + \dfrac{\mathrm{M}}{n} \leqslant \ell + \varepsilon$: la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers sa borne inférieure.

Commentaires : *Ce lemme établit avec très peu d'hypothèses la convergence de certaines suites de réels, dites sous-additives, sans aucune information sur la limite.*

III/ Suites adjacentes

Exercice 19 : Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

Correction :

— $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^3} \geqslant 0$.

Donc **la suite** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ **est croissante.**

— $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^3} + \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{-(n^2+3n+1)}{(n+1)^3 n^2} \leqslant 0$.

Donc **la suite** $(v_n)_{n\geqslant 1}$ **est décroissante.**

— $v_n - u_n = \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Donc les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

Un peu d'histoire : *La limite de la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *est notée* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$.

On définit, lorsque c'est possible, la fonction de Riemann, notée ζ *par*

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x}.$$

On vient donc de voir que ζ *était définie en* 3. *On peut même déterminer une valeur approchée de* $\zeta(3)$ *:*

$$\zeta(3) \simeq 1,2020569$$

$\zeta(3)$ *est appelée constante d'Apéry en l'honneur de Roger Apéry, qui a démontré en 1977 le théorème d'Apéry :*

$$\zeta(3) \text{ est irrationnel.}$$

Fait remarquable pour la culture, pour tout entier $k > 1$, *la probabilité pour que* k *entiers strictement positifs pris au hasard n'aient aucun facteur commun est égale à* $\frac{1}{1}\zeta(k)$, *en particulier, la probabilité pour trois nombres d'être premiers entre eux est égale à l'inverse de la constante d'Apéry,* $\frac{1}{1}\zeta(3) \simeq 0,831907\ldots$.

En 2015, on connaissait à peu près 400 000 000 000 décimales de $\zeta(3)$.

Exercice 20 (Séries alternées) :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissant vers 0. On définit $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k.$$

   (a) Montrer que les suites extraites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
   (b) En déduire que $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite S.
   (c) Donner un encadrement de sa limite et montrer que, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $|\mathrm{S}-\mathrm{S}_n| \leqslant u_{n+1}$.
2. **Application :** Déterminer la nature de la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$\mathrm{H}'_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Correction :

1. (a) • Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a :

$$\mathrm{S}_{2n+2}-\mathrm{S}_{2n} = u_{2n+2}-u_{2n+1} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_{2n+3}-\mathrm{S}_{2n+1} = -u_{2n+3}+u_{2n+2} \geqslant 0.$$

Les suites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc respectivement décroissantes et croissantes.

Suites

- Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, on a aussi $S_{2n+1}-S_{2n}=u_{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Les deux suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc deux suites adjacentes.

(b) D'après la question précédente, les sous-suites extraites d'indices pair et impair de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers la même limite ce qui équivaut à la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers celle-ci que l'on note dorénavant S.

(c) Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant adjacentes, on en déduit également les inégalités suivantes :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ S_{2n+1}\leqslant S\leqslant S_{2n}.$$

On a alors

$$|S-S_{2n}|=S_{2n}-\underbrace{S}_{\geqslant S_{2n+1}}\leqslant S_{2n}-S_{2n+1}=u_{2n+1}.$$

On procède de même pour $|S-S_{2n+1}|$ à partir de $S_{2n+1}\leqslant S\leqslant S_{2n+2}$ *i.e.* $|S-S_{2n+1}|\leqslant u_{2n+2}$.

Conclusion, $\forall\, n\in\mathbb{N},\ |S-S_n|\leqslant u_{n+1}$.

2. **Application :** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\dfrac{1}{n}$ est à termes positifs et décroissante vers 0.

   D'après la question précédente, la suite $(H'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

   Commentaires : $(H'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *s'appelle la série harmonique alternée qui converge a contrario de sa consœur non alternée* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *qui diverge.*

Exercice 21 :

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n(n!)}$ sont adjacentes.
2. (a) On pose $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{n!}\,e^{1-x}\,dx$. Calculer I_0 et montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (b) Montrer que $I_{k-1}-I_k=\dfrac{1}{k!}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

   (c) En déduire que $u_n=e-I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$.
3. En déduire que e est irrationnel.

Correction :

1. Trois points à montrer :

   — $v_n-u_n=\dfrac{1}{nn!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

   — $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)!}\geqslant 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

   — $v_{n+1}-v_n=-\dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!}\leqslant 0$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

   Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergentes vers la même limite.
2. (a) $I_0=\displaystyle\int_0^1 e^{1-x}\,dx=\left[-e^{1-x}\right]_0^1=e-1$.

Sur $[0\,;1]$, $0 \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}$ donc, par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n!}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'après les théorèmes d'encadrement, $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $x \longmapsto \dfrac{x^k}{k!}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{1-x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$. Une intégration par parties s'écrit :

$$\mathrm{I}_{k-1} = \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^k}{k!}\,\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^k}{k!}\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k!} + \mathrm{I}_k.$$

Donc, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_{k-1} - \mathrm{I}_k = \dfrac{1}{k!}$.

(c) Il suffit de sommer les égalités précédentes pour k variant de 1 à $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_{k-1} - \mathrm{I}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \iff \mathrm{I}_n - \mathrm{I}_0 = u_n \iff u_n = \mathrm{e} - \mathrm{I}_n.$$

Comme $u_0 = 0 = \mathrm{e} - \mathrm{I}_0$, cette relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après les théorème sur les limites de sommes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$.

Commentaires : *Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant v_n$ est une approximation de e à une précision plus petite que $\dfrac{1}{n(n!)}$.*

On a, par exemple, $u_3 = 1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6} = 2+\dfrac{1}{3} \simeq 2,67$ est une approximation de e à une précision inférieure à $\dfrac{1}{18}$.

3. Par l'absurde supposons que $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

On a $u_q \leqslant \mathrm{e} \leqslant v_q$ avec u_q est un rationnel qui peut donc s'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{N}}{q!}$, $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.

On a alors :

$$u_q = \frac{\mathrm{N}}{q!} < \mathrm{e} = \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{qq!} = \frac{\mathrm{N}}{q!} + \frac{1}{qq!} \text{ ou } \mathrm{N} < p(q-1)! < \mathrm{N} + \frac{1}{q} < \mathrm{N}+1.$$

L'entier $p(q-1)!$ est donc strictement compris entre les deux entiers consécutifs N et $\mathrm{N}+1$. Impossible !

Exercice 22 (Moyenne arithmético-géométrique) : Soient $0 \leqslant b \leqslant a$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

On admettra (ou on démontrera) que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies avec $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ pour tout entier n.

1. Démontrer que pour tous réels positifs x et y, on a
$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$
2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant v_n$, $u_n \geqslant u_{n+1}$ et $v_{n+1} \geqslant v_n$.
3. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - v_n)$.

Suites

4. Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $\mathrm{M}(a,b)$.
5. Écrire une fonction Python nommée `moyenne(a,b,ecart)` qui donne un encadrement de $\mathrm{M}(a,b)$, avec une amplitude inférieure ou égale à `ecart`.

Correction :

1. Il suffit de remarquer que $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0$ et de développer cette inégalité.
2. On remarque d'abord que les suites sont bien définies (en particulier, elles sont toujours positives). L'inégalité $u_n \geqslant v_n$ est une conséquence immédiate de la question précédente, avec $x = u_{n-1}$ et $y = v_{n-1}$.

   De plus, on a :
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leqslant \frac{u_n + u_n}{2} \leqslant u_n.$$
   De même,
$$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant \sqrt{v_n^2} = v_n.$$
3. On sait déjà que $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$. De plus,
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2}.$$
   Puisque $0 \leqslant v_n \leqslant u_n$ et par croissance de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$, on a $\sqrt{u_n v_n} \geqslant v_n$. On en déduit que
$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \frac{1}{2}(u_n - v_n).$$
4. De la relation précédente, on déduit par une récurrence immédiate que, pour tout entier naturel n, on a
$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}(u_0 - v_0).$$
   Ainsi, $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

   On en déduit que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes : elles convergent vers la même limite !
5. L'algorithme calcule les termes successifs des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'à ce que $u_n - v_n <$`ecart`.

   Par rapport à la définition des suites de l'exercice, on prend juste garde à ce qu'on est toujours $u_n \geqslant v_n$, même au premier rang et on doit faire intervenir une variable supplémentaire pour le calcul successif des termes des suites (car on a une récurrence croisée).

   Codé sous Python, ceci donne :

```python
def moyenne(a,b,ecart):
    u=a
    v=b
    while ((u-v)>ecart) :
        w=u
        u=(u+v)/2
        v=math.sqrt(w*v)
    return u,v
```

Suites