Chapitre

XIV Suites réelles et complexes

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul.

On en trouve, par exemple, chez Archimède, pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700av. J.-C. et plus récemment au I^er siècle apr. J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie :

Pour extraire la racine carrée de A, *choisir une expression arbitraire* a *et prendre la moyenne entre* a *et* $\frac{\mathrm{A}}{a}$ *et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent*

En notation moderne, cela définit la suite de nombres $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{\mathrm{A}}{u_n}\right).$$

On retrouve ensuite cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du XV^ème siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval). Dans l'Encyclopédie Raisonnée de d'Alembert et Diderot (1751), une grande part est laissée aux suites et séries dont le principal intérêt semble être leur *convergence*.

C'est ainsi que l'on voit Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle. L'étude des suites numérique ouvre la porte à bien d'autres notions séquentielle comme les suites de fonctions, séries, séries entières ou de Fourier. Voyez ce chapitre comme leur préambule.

Deux suites adjacentes décident d'aller s'éclater dans une soirée « no limit ».

Mais elles se font refouler à l'entrée... [1]

[1]. Un peu d'humour qui se mérite. Vous comprendrez dans ce chapitre.

CONTENU

Comme toujours, $\mathbb{K}$ désignera le corps des scalaires $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Notation toute personnelle : *Dans tout ce chapitre, nombre de prédicats, de définitions et de propositions ne sont vrais ou ne nécessitent d'être vrais qu'à partir d'un certain rang* $n_0 \in \mathbb{N}$.

Afin d'alléger les énoncés sans perdre en généralité, je noterai parfois $\mathbb{N}_{n_0} = \mathbb{N} \cap [n_0\,;+\infty[$ *l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à* n_0.

Ainsi, une propriété vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ *signifiera qu'elle n'est vraie qu'à partir d'un certain rang* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Rang qui importe peu.*

I/ Suites numériques

I.1 Vocabulaire et généralités

Définition 1 : Une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

Une *suite numérique* est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

À chaque *indice* $n \in \mathbb{N}$ on associe un nombre u_n appelé *terme* de rang n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'ensemble des suites est noté $\mathcal{S}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque : Fondamentalement, cela ne change rien de considérer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang n_0.

ATTENTION $u_n \neq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$!

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rencontrées sont définies :

— de manière *explicite* : $u_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$.

Le terme de rang n est directement obtenu en fonction de n.

C'est une définition qui ressemble beaucoup à la définition usuelle d'une fonction, et qui est extrêmement pratique pour les calculs. C'est celle que l'on cherchera à obtenir le plus souvent.

— de manière *récurrente* : $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 5 - \dfrac{16}{u_n+3}. \end{cases}$

Le terme de rang $n+1$ est obtenu en fonction du terme précédent.

C'est beaucoup moins pratique pour les calculs qu'une définition explicite, mais c'est souvent la définition la plus naturelle que nous aurons d'une suite et souvent celle qu'obtiennent nos chers physiciens.

Il pourra arriver qu'une suite soit définie par récurrence double (u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n), auquel cas il faudra préciser les valeurs de u_0 et u_1, voire par récurrence triple ou pire (mais c'est plus rare !).

Un prochain chapitre sera consacré aux suite récurrentes dite d'ordre r.

— de manière *implicite* : $\mathrm{e}^{u_n} - u_n - 2 = n$.

Le terme de rang n est défini comme solution d'une équation voire en fonction de u_{n+1}.

Pas vraiment extrêmement pratique pour les calculs et on n'arrive pas toujours à obtenir une formule explicite comme pour les primitives. Dans ce cas, on arrive quand même à étudier la suite à l'aide d'études de fonctions.

L'ensemble des suites réelles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est naturellement muni d'opérations de somme (on additionne les deux suites terme à terme), de produit et de produit par un réel.

Définition 2 (Stabilité algébrique) : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles (ou complexes).

— La *suite somme* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite notée $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u+v)_n = u_n + v_n.$$

— Le *suite produit* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite notée $(u\times v)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u\times v)_n = u_n \times v_n.$$

— Le *suite produit de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est la suite notée $(\lambda u)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\lambda u)_n = \lambda \times u_n.$$

— Les *suites parties réelle et imaginaire* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement les suites définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\mathrm{Re}\,(u))_n = \mathrm{Re}\,(u_n) \quad \text{et} \quad (\mathrm{Im}\,(u))_n = \mathrm{Im}\,(u_n)\,.$$

En particulier, l'ensemble des suites réelles (ou complexe) contient la suite nulle dont tous les termes sont égaux à 0 et est stable par combinaisons linéaires : C'est un espace vectoriel réel (ou complexe). En considérant la suite produit, c'est même une $\mathbb{C}$-algèbre commutative mais non intègre.

I.2 Exemples

Définition 3 :

Suite arithmétique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* lorsqu'il existe un scalaire r, appelé *raison*, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *géométrique* lorsqu'il existe un scalaire q, appelé *raison*, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q.$$

Suite arithmético-géométrique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe un couple $(a\,;b) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, la suite arithmético-géométrique précédente est une suite arithmétique, géométrique si $b = 0$.

Exemples 1 :

- La suite des entiers naturels : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, ..., $u_n = n$, ... et la suite des multiples de 3 : $u_0 = 0$, $u_1 = 3$, ..., $u_n = 3n$, ... sont des suites arithmétiques.
- La suite des puissances de 2 : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, , ..., $u_n = 2^n$... est une suite géométrique.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison ($m < n$)	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = u_n + r$	$r = \dfrac{u_n - u_m}{n - m}$	$u_n = u_m + (n-m)r$	$(n-m+1) \times \dfrac{u_m + u_n}{2}$

Figure XIV.1 – $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Exercice 1 : Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = 2$ et $z_{n+1} = 2z_n + 2^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Montrer que la suite de terme général $t_n = \dfrac{z_n}{2^n}$ est arithmétique et en déduire une expression explicite de z_n.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison ($m < n$)	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$	$u_{n+1} = u_n \times q$	$q = \sqrt[n-m]{\dfrac{u_n}{u_m}}$	$u_n = u_m \times q^{n-m}$	$u_m(n-m+1)$ si $q=1$. $u_m \times \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

Figure XIV.2 – $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

I.3 Suites bornées

Définition 4 (Suites réelles majorées, minorées, bornées) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
- *majorée* s'il existe un réel M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \mathrm{M}$.
- *minorée* s'il existe un réel m tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$.
- *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

ATTENTION

Les majorants (ou minorants) d'une suite sont, par définition des constantes.

Une majoration (une minoration) de u_n par un réel **qui dépend** de n ne montre **PAS** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (ou minorée).

Exemples 2 :
- La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par -1. Elle est donc bornée.
- La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.

  En revanche, elle n'est pas majorée (et donc non bornée).
- Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Méthode 1 (Encadrer une suite) :
Avant de se lancer, on réfléchira à la méthode la plus adaptée :
- En général, on étudie le signe de la différence $u_n - m$ ou $u_n - \mathrm{M}$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut utiliser le tableau de variations de la fonction f pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, minorée ou bornée.
- Si le terme général est donné sous la forme d'un quotient, on peut majorer/minorer numérateur et dénominateur.

Exercice 2 : Soit $\alpha \in \,]0\,;1[$ fixé.
1. Montrer que $\forall\, x \in \,]-1\,;+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\alpha^k\right)$ est bornée.

Méthode 2 (Suite non majorée) :
Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée :
- On se donne un réel A quelconque.
- On montre que l'on peut toujours trouver un terme de la suite plus grand que A en résolvant, par exemple, l'inéquation $u_n \geqslant A$.

Proposition 1 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée si, et seulement si la suite } (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée.}$$

Cette propriété permet d'étendre la définition de suite bornée aux suites à valeurs complexes en faisant appel au module :

Définition 5 (Suite complexe bornée) : Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si la suite réelle positive $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Exemple 3 : $\left(e^{e^{in}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

À l'aide de l'inégalité triangulaire, on démontre sans peine le résultat suivant :

Proposition 2 :
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \quad\Longleftrightarrow\quad (\mathrm{Re}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \quad\text{et}\quad (\mathrm{Im}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont bornées.}$$

Exercice 3 : Montrer que l'ensemble des suites bornées est non vide, est stable par combinaisons linéaires, produits, et produits par un scalaire.

On dit que l'ensemble des suites bornées muni des trois opérations $+$, $\times$ et de la multiplication par un scalaire vue comme loi externe est une $\mathbb{K}$-*algèbre*.

Définition 6 (Relation de domination) : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *dominée* par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On note alors $u_n = \mathrm{O}\,(v_n)$.

Cette notation est dû à Landau [2] :

- On lit aussi « u_n est un un grand O de v_n. »
- On écrit aussi $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right)$ même s'il est assez clair que la domination ne se fait qu'au voisinage de l'infini où à partir d'un certain rang.

Remarque : D'après la proposition (1) ,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right) \iff \exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\quad |u_n| \leqslant \mathrm{M}\,|v_n|\,.$$

Exemples 4 :
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $u_n = \mathrm{O}\left(1\right)$.
- $2n^2+1 = \mathrm{O}\left(n^2\right)$ et $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
- $\begin{cases} u_n = \mathrm{O}\left(w_n\right) \\ v_n = \mathrm{O}\left(w_n\right) \end{cases} \implies u_n + v_n = \mathrm{O}\left(w_n\right)$.
- $\begin{cases} u_n = \mathrm{O}\left(w_n\right) \\ v_n = \mathrm{O}\left(w'_n\right) \end{cases} \implies u_n \times v_n = \mathrm{O}\left(w_n \times w'_n\right)$.

I.4 Variations

Définition 7 (Suites monotones) : On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :
- *croissante* si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
- *décroissante* si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \geqslant u_{n+1}$.
- *stationnaire* si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n = u_{n+1}$.

Une suite croissante ou décroissante est dite *monotone*.

On parlera aussi de suites *strictement monotones* lorsque les inégalités larges ci-dessus seront remplacées par des inégalités strictes.

ATTENTION

1. La notion de suites monotones n'existe pas pour les suites à valeurs complexes.
2. Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissante, ni monotones, ni rien.

Exemples 5 :
- $u_n = (-1)^n$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$, $u_n = \tan(n)$ ne sont pas monotones.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(100-k)$ est stationnaire à 0 à partir du rang $n = 100$.

[2]. **Edmund Georg Hermann Landau** (Berlin, 14 février **1877** - Berlin, 19 février **1938**) est un mathématicien allemand juif, auteur de 253 publications mathématiques, en grande partie sur la théorie des nombres.

Exercice 4 : Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \cos\left(\dfrac{2\pi n!}{p!}\right)$.

Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Proposition 3 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :
   - si $r \geqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
   - si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,
   - si $r \leqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison q relativement à 1 et le signe de son premier terme u_0 :
   - Si $q = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à 0 à partir de son deuxième terme.
   - si $u_0 \geqslant 0$ et $q > 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante(strictement si $u_0 > 0$).
   - Si $q = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à u_0.
   - Si $u_0 \geqslant 0$ et $0 < q < 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (strictement si $u_0 > 0$).
   - Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Remarques :
- Une suite arithmétique est donc monotone dans tous les cas.
- Si elle n'est pas constante, une suite géométrique est toujours strictement monotone.

Comparez deux termes d'une suite est difficile à faire directement. On se ramène donc encore à comparer leur différence à 0 ou leur quotient à 1.

Méthode 3 (Montrer qu'une suite est croissante) :
Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :
- On exprime $u_{n+1} - u_n$, on factorise, réduit au même dénominateur, ...
- À l'aide d'un tableau de signes, on montre que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Méthode 4 (Montrer qu'une suite est croissante) :
Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous forme multiplicative et à termes strictement positifs est croissante :
- On exprime $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, on factorise, simplifie majore, minore, ...
- On montre le numérateur est plus grand que le dénominateur *i.e.* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

Exercice 5 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$.

Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Proposition 4 (Suites définies explicitement par une fonction) :
Soient f une fonction définie sur $[n_0\,;+\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

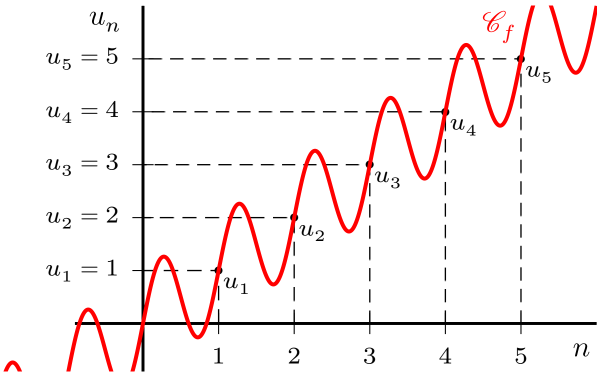
$$\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n = f(n).$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même monotonie que la fonction. La réciproque est fausse.

Soit la fonction $f : x \longmapsto x + \sin(2\pi x)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$.

— $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = n + \sin(2\pi n) = n$ [a]. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

— La fonction, représentée en rouge, n'est même pas monotone.



a. $\sin(0\pi) = \sin(2\pi) = \sin(3\pi) = \sin(4\pi) = \ldots = 0$!

II/ Comportement asymptotique des suites

Il est temps de s'intéresser au comportement d'une suite lorsque $n \to +\infty$ *i.e.* son *comportement asymptotique.*.

Deux cas, opposés l'un de l'autre se présentent : les suites convergentes et les suites divergentes. Parmi ces dernières, les divergentes vers l'infini et celle n'ayant pas de limites.

II.1 Convergence et divergence

Définition 8 (Limite d'une suite réelle) : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si tout voisinage de ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists\, n_o(\mathrm{V}_\ell) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \in \mathrm{V}_\ell.$$

  En particulier :
  - On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :
  $$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
  - On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *divergente* vers $+\infty$ si :
  $$\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, n_o(\mathrm{A}) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \geqslant \mathrm{A}.$$
  - On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *divergente* vers $-\infty$ si :
  $$\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, n_o(\mathrm{A}) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \leqslant \mathrm{A}.$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge* si elle ne converge pas.

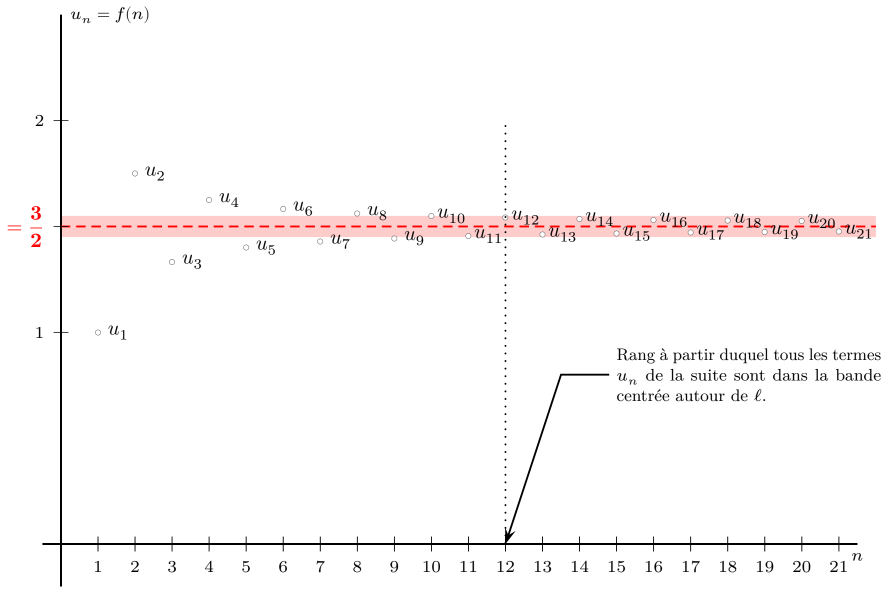


Figure XIV.3 – La suite définie par $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{2n}$ converge vers $\ell = \dfrac{3}{2}$.

Rappel 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \iff u_n \in [\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon] \iff \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$

ATTENTION Le contraire de convergent n'est pas divergent vers l'infini !

Exemple 6 : La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

En effet, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend que les valeurs 1 et -1 donc ne peut converger que vers une de ces valeurs.

Comme $\left[\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{4}{3}\right]$ est un voisinage de 1 ne contenant pas $u_{2n+1} = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 1. De même avec $\left[-\dfrac{4}{3}\,;-\dfrac{2}{3}\right]$ et $u_{2n} = 1$, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers -1.

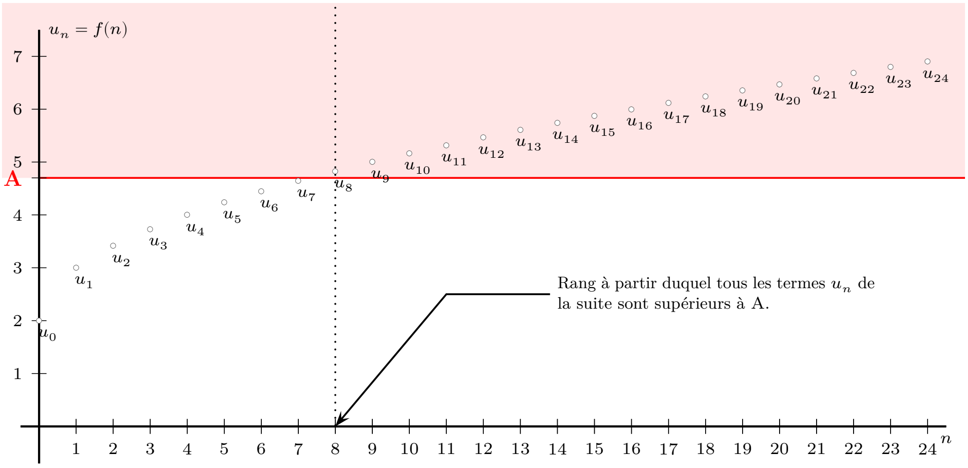


Figure XIV.4 – La suite définie par $u_n = \sqrt{n} + 2$ diverge vers $+\infty$.

Remarques : Le comportement asymptotique d'une suite ne dépend que du comportement de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple 7 : La suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Tout intervalle $[-a\,;a]$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$, contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir du rang $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{a} \right\rfloor + 1$.

La définition (9) se prolonge aux suites à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue par le module :

Définition 9 (Limite d'une suite complexe) : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

ATTENTION La notion de suites complexes divergeant vers l'infini ne veut rien dire dans $\mathbb{C}$!

On déduit immédiatement de la définition (9) la proposition ci-dessous :

Proposition 5 :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0.$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\,(u_n) = \mathrm{Re}\,(\ell) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}\,(u_n) = \mathrm{Im}\,(\ell)\,. \end{cases}$

   En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \overline{u_n} = \overline{\ell}.$

Preuve :

1. C'est la définition avec $\ell = 0$.
2. itou

3.($\Rightarrow$) : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |\mathrm{Re}\,(u_n) - \mathrm{Re}\,(\ell)| \leqslant |u_n - \ell|$ et $|\mathrm{Im}\,(u_n) - \mathrm{Im}\,(\ell)| \leqslant |u_n - \ell|$.

($\Leftarrow$) : $|u_n - \ell| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,(u_n) - \mathrm{Re}\,(\ell))^2 + (\mathrm{Im}\,(u_n) - \mathrm{Im}\,(\ell))^2}$.

Corollaire 5.1 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|\,.$$

ATTENTION La réciproque est fausse. Il suffit de considérer la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve : D'après l'inégalité triangulaire $\big||u_n| - |\ell|\big| \leqslant |u_n - \ell|$ ...

Exercice 6 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$.

   Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si elle est stationnaire.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ *i.e.* $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+p} = u_n$.

   Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors elle est constante.

Correction :

1. ($\Leftarrow$) **:** Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit stationnaire, et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

   Par définition d'une suite stationnaire, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, n \geqslant \mathrm{N}, u_n = a$.

   On a donc $\forall\, n \geqslant \mathrm{N}, |u_n - a| = 0$. Par conséquent, $\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, n \geqslant \mathrm{N}, |u_n - a| < \varepsilon$.

   On a prouvé que $\forall\, \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall\, n \geqslant \mathrm{N}, |u_n - a| < \varepsilon$. La suite converge donc.

   ($\Rightarrow$) **:** On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrons qu'elle est stationnaire.

   Soit ℓ sa limite.

   — Montrons que $\ell \in \mathbb{Z}$.

     Par l'absurde, supposons que $\ell \notin \mathbb{Z}$. En ce cas, on a $\lfloor \ell \rfloor < \ell < \lfloor \ell \rfloor + 1$.

     On peut alors trouver $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ ne contienne aucun entier.

     C'est absurde car il doit contenir tous les u_n.

On peut prendre $\varepsilon = \min\left(\dfrac{\ell - \lfloor \ell \rfloor}{2}, \dfrac{\lfloor \ell \rfloor + 1 - \ell}{2}\right)$.

— On sait désormais que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{Z}$. Montrons qu'elle est stationnaire en ℓ.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \ell$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant \mathrm{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{10}$ *i.e.* $u_n \in \left[\ell - \dfrac{1}{10}, \ell - \dfrac{1}{10}\right]$.

Mais par ailleurs, l'intervalle $u_n \in \left[\ell - \dfrac{1}{10}, \ell - \dfrac{1}{10}\right]$ ne contient qu'un seul entier (ℓ) et u_n est entier.

D'où $\forall\, n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n = \ell$. On a prouvé que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien stationnaire.

Remarque : Le résultat est bien entendu faux pour les suites réelles : la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, or elle n'est pas stationnaire.

Proposition 6 :
Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Si, $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Preuve : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe un rang n_1 à partir duquel $\alpha_n \leqslant \varepsilon$.

Pour $n \geqslant \max(n_0\,;n_1)$, on a donc $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n \leqslant \varepsilon$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Proposition 7 :
1. $\forall\, p \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et $(n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.
2. $\forall\, q \in]-1\,;1[$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Preuve :
1. (a) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\left|\frac{1}{n^p}\right| \leqslant \varepsilon \iff \frac{1}{\mathrm{e}^{p\ln(n)}} \leqslant \varepsilon \underset{\varepsilon>0}{\iff} p\ln(n) \geqslant -\ln(\varepsilon) \underset{p>0}{\iff} n \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{p}\ln(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de poser $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$.

(b) Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralités, on peut supposer $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+^*$.

$$|n^p| \geqslant \mathrm{A} \iff \mathrm{e}^{p\ln(n)} \geqslant \mathrm{A} \underset{\mathrm{A}>0}{\iff} p\ln(n) \geqslant \ln(\mathrm{A}) \underset{p>0}{\iff} n \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{p}\ln(\mathrm{A})} = \sqrt[p]{\mathrm{A}}.$$

Il suffit donc de poser $n_0 = \left\lfloor \sqrt[p]{\mathrm{A}} \right\rfloor + 1$.

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

   Si $q = 0$, le résultat est clair. Sinon, on cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ implique

$$|q^n| = |q|^n \leqslant \varepsilon \iff n \ln|q| \leqslant \ln(\varepsilon) \underset{|q|<1}{\iff} n \geqslant \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln|q|}.$$

   Il suffit donc de poser $n_0 = \left\lfloor \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln|q|} \right\rfloor + 1$.

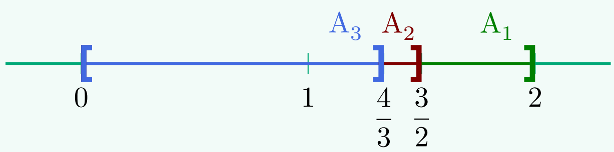
Exemple 8 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall\, n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \left(\dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\right)^n$ converge vers 0.

Corollaire 7.1 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge (vers } \pm\infty) \text{ si, et seulement si } r \neq 0.$$

Exercice 7 : Montrer que $[0\,;1] = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[0\,;1 + \frac{1}{n}\right]$.

Correction :

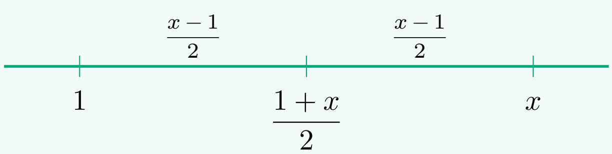


Soit $x \in [0\,;1]$. Alors $0 \leqslant x \leqslant 1 \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$ pour tout entier naturel non nul.

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathrm{A}_n \iff x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n$. On a donc $[0\,;1] \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n$.

Réciproquement, soit $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n \iff \forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant x \leqslant 1 + \frac{1}{n}$.

Par l'absurde, supposons que $x > 1$ et posons $\varepsilon = \dfrac{x-1}{2} > 0$.



Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on peut trouver un entier $n_0(\varepsilon)$ tel que $n \geqslant n_0 \implies \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Or, pour $n \geqslant n_0$, on a alors $x \leqslant 1+\dfrac{1}{n} < 1+\varepsilon = 1+\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{1+x}{2} < x$ et la contradiction.

Donc, $x \leqslant 1$ et $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n \subset [0\,;1]$.

Par double inclusion, on a donc montré que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n = [0\,;1]$.

Théorème 8 :
Si une suite converge alors sa limite est unique.

On peut donc légitimement parler de LA limite d'une suite convergente.

Par la contraposée, si une suite possède plusieurs limites [3] alors elle diverge.

Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n$ qui possède deux valeurs d'adhérence 1 et -1 est divergente.

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Supposons qu'elle admette deux limites distinctes ℓ et ℓ' et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|\ell - \ell'\right| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'|\,.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

— Par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_1 \implies |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

— Par convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ', $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_2 \implies |u_n - \ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geqslant n_0 = \max(n_1\,;n_2)$, $\left|\ell - \ell'\right| \leqslant \varepsilon$. Majoration vraie pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\ell = \ell'$.

Si vous n'êtes pas convaincus, posez $\varepsilon < \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$.

Exercice 8 (Série harmonique) : On considère la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. Que dire de la convergence de $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 9 (Lemme de Cesàro - complément de cours) : Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe et c la suite de terme général

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

[3]. En mathématiques, on parle plutôt de valeurs d'adhérence. C'est mieux que de parler de plusieurs limites alors que l'on vient de dire qu'elle était unique.

1. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En utilisant la définition de la limite, montrer que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. En déduire que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$, alors $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose maintenant que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer qu'il en est de même pour c_n.
5. Application : montrer que si une suite vérifie $a_{n+1} - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}^*$, alors $\dfrac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Correction :

1. Soit $\varepsilon > 0$.

   Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\exists\, n_0\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies |u_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   $$\text{Or, } c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} u_k$$
   $$|c_n| \leqslant \frac{\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right|}{n} + \frac{\left|\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right|}{n}$$

   $\forall\, n \geqslant n_0$, on a :

   $$\leqslant \frac{\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right|}{n} + \underbrace{\frac{n-n_0+1}{n}}_{=1-\frac{n_0-1}{n}\leqslant 1}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Or, $\left|\displaystyle\sum_{k-1}^{\mathrm{N}-1} u_k\right|$ est un réel et donc, à partir d'un certain rang n_1, $\dfrac{\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right|}{n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ ce qui assure que,

   $$n \geqslant \max(n_0, n_1) \implies |c_n| \leqslant \varepsilon.$$

   On a donc bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$.
2. Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente à la suite de termes $u_n - \ell$ qui converge vers 0.

   La suite de termes $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell$ converge alors vers 0 *i.e.* $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

   On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en moyenne* vers ℓ.
3. La réciproque est fausse : il suffit de considérer la suite de termes $(-1)^n$ qui diverge alors qu'elle converge en moyenne vers 0.
4. **Remarque :** Il est sous-entendu ici que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle.

   Soit $\mathrm{A} > 0$.

   Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe un rang n_0 à partir duquel les termes de la suite sont supérieurs à $2\mathrm{A}$.

Pour tout $n > n_0$, on a alors :

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k-1}^{n_0-1} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} u_k \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k-1}^{n_0-1} u_k + 2\mathrm{A}\frac{n-n_0+1}{n}.$$

Or,

— $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc est supérieur à $-\dfrac{\mathrm{A}}{2}$ à partir d'un certain rang n_1.

— $\displaystyle 2\frac{n-\mathrm{N}+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ donc est supérieur à $\dfrac{3}{2}$ à partir d'un certain rang n_2.

Finalement, $n \geqslant \max(n_0, n_1, n_2) \implies c_n \geqslant \mathrm{A}$ *i.e.* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$.

Remarque : La démonstration est facilement adaptable pour $\ell = -\infty$ ce qui permet de donner la version définition du théorème de Césaro :

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors elle converge également en moyenne vers la même limite.

Commentaires : *Une autre démonstration dans le cas où $\ell = +\infty$ plus jolie mais plus fine.*

Pour tout réel $\mathrm{A} > 0$, il existe une suite $a_n \leqslant u_n$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\mathrm{A}$ (par exemple : $a_n = \min(u_n, 2\mathrm{A})$).

La suite des moyennes de (a_n) converge vers $2\mathrm{A}$ d'après la question 2, et minore celle des moyennes c_n de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui sont donc $> \mathrm{A}$ à partir d'un certain rang.

Ceci, valant pour tout $\mathrm{A} > 0$, prouve que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a bien pour limite $+\infty$.

5. Si la suite de termes $a_{n+1} - a_n$ converge vers ℓ alors elle y converge en moyenne *i.e.* la suite de termes $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \frac{a_n}{n} - \frac{a_0}{n}$ converge vers ℓ.

   Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0}{n} = 0$, d'après les théorème sur les limites de sommes, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n} = \ell.$$

Commentaires : *Cette propriété est connue sous le nom de « lemme de l'escalier » : a_n représentant la hauteur de la $n^{\text{ème}}$ marche. Si la hauteur entre chaque marche converge vers ℓ alors la hauteur de la $n^{\text{ème}}$ marche tend vers $n\ell$.*

II.2 Limite et relation d'ordre

Proposition 9 :

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

Preuve : Posons $\varepsilon = 1$. Alors il existe un $n_0(1) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant 1$.

D'où $\forall\, n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$ d'après l'inégalité triangulaire.

Posons $\mathrm{M} = \max\left(|u_0|,\ |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|, 1+|\ell|\right)$.

On a alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \mathrm{M}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

ATTENTION La réciproque est encore fausse toujours en considérant $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exemple 9 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall\, n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (1+\mathrm{i})^n$ diverge.

Petit corollaire intéressant pour montrer, par exemple, qu'une suite convergeant vers un réel non nul est non nulle du même signe à partir d'un certain rang.

Corollaire 9.1 :

1. Toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement positif ou divergeant vers $+\infty$ est minorée par un réel m strictement positif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell > 0 \implies \exists\, m \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \geqslant m > 0.$$

2. Toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement négatif ou divergeant vers $-\infty$ est majorée par un réel M strictement négatif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell < 0 \implies \exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant \mathrm{M} < 0.$$

Preuve :

1. — Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il suffit de prendre $\mathrm{A} = 1$ pour avoir $u_n \geqslant 1 > 0$ dès que $n \geqslant n_0(\mathrm{A})$ donné par la divergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   — Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, prenons $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$.

   Il existe alors un rang n_0 au delà duquel $-\dfrac{\ell}{2} \leqslant u_n - \ell \leqslant \dfrac{\ell}{2} \implies 0 < \dfrac{\ell}{2} \leqslant u_n$.

   Ainsi, dans les deux cas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certains rang par un réel strictement positif.
2. Identique

Théorème 10 (Limites et inégalités strictes) :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel ℓ et et m, $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \mathrm{M}$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $u_n < \mathrm{M}$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > m$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $u_n > m$.

Preuve : Il suffit d'appliquer le corollaire (9.1) aux suites $u_n - \mathrm{M}$ et $u_n - m$.

Théorème 11 (Limites et inégalités larges) :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles possédant une limite finie.

$$\text{Si } \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant v_n \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Remarque : Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux suites est constante.

Exemple 10 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente avec $u_n \leqslant \mathrm{A}$ à partir d'un certain rang.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \mathrm{A}$.

ATTENTION C'est **TRÈS** faux avec des inégalités STRICTES ! Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Preuve : Raisonnons par l'absurde en supposant que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) < 0$.

Le théorème (10) affirme alors que $v_n - u_n < 0$ à partir d'un certain rang ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

II.3 Composition par une fonction

Une suite, n'étant qu'une fonction particulière, on peut traduire les théorèmes sur les limites de composée :

Théorème 12 (Composition à gauche par une fonction) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathrm{I}}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une application et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I.

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Exemples 11 (Importants) :

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si f est continue en a et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x$.

En appliquant le théorème précédent aux fonctions de référence, on retrouve facilement les limites de quelques suites intuitives :

— $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$ — $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty.$ — ...

Exemples 12 :

- $\arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}.$
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0$ alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ indépendant de n.
- $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$
- $n^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$

ATTENTION

Les derniers exemples montrent que 1^∞ est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \cancel{\Longrightarrow} u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

De même ∞^0 est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \cancel{\Longrightarrow} u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

En tout état de cause, il faudrait en rajouter d'autres : 0^0, 0^∞ et ∞^∞ que nous traiterons au cas par cas en nous ramenant aux précédentes.

En composant avec les limites usuelles de fonctions et en remarquant que $t^n = \mathrm{e}^{n\ln t}$ pour $t > 0$, on retrouve encore les limites usuelles.

Corollaire 12.1 (Limites usuelles et croissances comparées) :

Puissances de n : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha$	0	1	$+\infty$

Croissances comparées : Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, $q > 1$ et $x \in]-1\,;1[$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = 0$

II.4 Opérations sur les limites

Un peu d'histoire : *Les théorèmes qui suivent étaient jugés évidents au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Une tentative de démonstration aurait alors paru incongrue et superflue. Ces démonstrations nous sont cependant nécessaires pour plusieurs raisons :*

— *Montrer l'efficacité de notre définition de limite.*
— *Justifier la validité de notre intuition.*
— *Servir de modèle de démonstration pouvant être utilisé dans des cas plus complexes.*

Les résultats de certaines opérations sur les limites sont intuitifs et parfaitement déterminés.

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) : On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
  - $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- On ajoute deux symboles 0^+ et 0^- vérifiant pour $a \neq 0$:
  - $a \times 0^+ = 0^{\text{signe }(a)}$
  - $a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$
  - $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$
  - $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$
  - $\dfrac{1}{+\infty} = 0^+$
  - $\dfrac{1}{-\infty} = 0^-$.

Les quotients $\dfrac{a}{b}$ s'obtiennent comme $a \times \dfrac{1}{b}$ si l'opération est définie.

ATTENTION Les opérations $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (+\infty)$, $0 \times (-\infty)$, $\dfrac{0^\pm}{0^\pm}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(0^\pm)^{\pm\infty}$ et $(\pm\infty)^{0^\pm}$ ne sont pas définies et appelées « formes indéterminées », c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles qu'ils faudra... déterminer.

Les règles suivantes sont données pour des suites dont on sait déjà qu'elles admettent une limite. Ils ne donnent pas de résultat sur les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ directement, mais sur des suites fabriquées avec des opérations usuelles entre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 13 :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant des limites ℓ et ℓ'.

Somme :

Si $\ell + \ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Multiple :

Si $\lambda.\ell$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\lambda.u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda.\ell$.

Produit :

Si $\ell \times \ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $u_n \times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \times \ell'$.

Inverse :

Si $\dfrac{1}{\ell}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$.

Quotient :

Si $\dfrac{\ell}{\ell'}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Remarque : En particulier, l'ensemble des suites convergentes contient la suite nulle et est stable par combinaisons linéaires. On dit que c'est un *espace vectoriel.*

Dans la même idée, l'opérateur $\lim\limits_{n\to+\infty}$ est un opérateur linéaire sur l'ensemble des suites convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

ATTENTION L'ensemble des suites divergentes N'EST PAS stable par combinaisons linéaires.

Exemples 13 :

- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty \implies \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \implies \left|\dfrac{1}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Preuve :

Somme :

— Somme de deux limites finies ℓ et ℓ' : Soit $\varepsilon > 0$.

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leqslant |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|.$$

Il suffit alors de prendre $\mathrm{N} = \max\left(n_{0,u_n}\left(\ell, \dfrac{\varepsilon}{2}\right); n_{0,v_n}\left(\ell', \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.

— Somme d'une limite finie ℓ et d'une limite $+\infty$: On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Soit $\mathrm{A} > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < 1$ à partir d'un certain rang $n_0(1)$, donc, en particulier :

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n > \ell - 1.$$

De même, pour $n \geqslant n_1(\mathrm{A} - \ell + 1)$, $v_n > \mathrm{A} - \ell + 1$.

Pour $n \geqslant \mathrm{N} = \max(n_0 ; n_1)$, on a donc :

$$u_n + v_n \geqslant (\ell - 1) + (\mathrm{A} - \ell + 1) = \mathrm{A}.$$

— Somme de deux limites $+\infty$: Soit $\mathrm{A} > 0$ et posons $\mathrm{N} = \max\left(n_{0,u_n}\left(\dfrac{\mathrm{A}}{2}\right); n_{0,v_n}\left(\dfrac{\mathrm{A}}{2}\right)\right)$.

Alors, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n + v_n \geqslant \mathrm{A}$.

Produit et multiple : — Produit de deux limites finies ℓ et ℓ' : Soit $\varepsilon > 0$.

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant |(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')| \leqslant |u_n + \ell||v_n| + |\ell||v_n - \ell'|.$$

Or, d'après la proposition (9), la suite convergente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, disons par un réel $\mathrm{K} > 0$.

Il suffit alors de prendre $\mathrm{N} = \max\left(n_{0,u_n}\left(\ell, \frac{\varepsilon}{2\mathrm{K}}\right); n_{0,v_n}\left(\ell', \frac{\varepsilon}{2|\ell|}\right)\right)$.

Remarque : Si jamais il arrivait que ℓ ou K soient nuls, il suffirait de prendre respectivement $n_{0,v_n}\left(\ell', \frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)}\right)$ ou $n_{0,u_n}\left(\ell, \frac{\varepsilon}{2(\mathrm{K}+1)}\right)$ sans que l'inégalité finale ne soit changée.

— Produit d'une limite finie $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et d'une limite $+\infty$: On suppose $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Soit $\mathrm{A} > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang $n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, donc, en particulier :

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

De même, pour $n \geqslant n_1\left(\frac{2\mathrm{A}}{\ell}\right)$, $v_n > \frac{2\mathrm{A}}{\ell}$.

Pour $n \geqslant \mathrm{N} = \max(n_0; n_1)$, on a donc :

$$u_n v_n > \frac{\ell}{2} \times \frac{2\mathrm{A}}{\ell} = \mathrm{A}.$$

— Produit de deux limites $+\infty$: Soit $\mathrm{A} > 0$ et posons $\mathrm{N} = \max\left(n_{0,u_n}\left(\sqrt{\mathrm{A}}\right); n_{0,v_n}\left(\sqrt{\mathrm{A}}\right)\right)$.

Alors, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n v_n \geqslant \mathrm{A}$.

Il suffira de considérer $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme la suite constante à λ pour avoir la limite de la suite $(\lambda.u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour peu que $\lambda.\ell$ soit défini dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$.

Quotient : — Inverse d'une limite non nulle ℓ : Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ d'après le corollaire (9.1).

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|}.$$

Par définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_1 \implies |u_n - \ell| \leqslant \min\left(\frac{|\ell|}{2}; \frac{|\ell|^2\varepsilon}{2}\right).$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire, pour $n \geqslant n_1$:

$$||\ell| - |u_n|| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \frac{|\ell|}{2} \implies |u_n| \geqslant |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}.$$

Il suffit alors de prendre $\mathrm{N} = \max(n_0; n_1)$, pour avoir :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|} \leqslant \frac{\frac{|\ell|^2\varepsilon}{2}}{\frac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \varepsilon.$$

— Inverse d'une limite infinie : On suppose $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n \to \mathbb{N}} u_n = +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ à partir duquel $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Pour $n \geqslant \mathrm{N} = \max(n_0\,;n_1)$, on a donc :

$$\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{u_n} < \varepsilon.$$

— Inverse d'une limite nulle d'une suite strictement positive : On suppose $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathrm{A} > 0$. Il existe un rang $n_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ à partir duquel $|u_n| < \frac{1}{\mathrm{A}}$.

Pour $n \geqslant \mathrm{N} = \max(n_0\,;n_1)$, on a donc :

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{|u_n|} > \mathrm{A}.$$

Exemple 14 (Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$) :

— On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\ell) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}((n+\ell)-n) = \ell$.

— On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-n) = +\infty$.

— On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} n + (-1)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+(-1)^n - n)$ n'a pas de limite.

ATTENTION $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut avoir une limite sans que ce ne soit le cas pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 15 (Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$) :

— On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ell}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ell}{n}\times n = \ell$.

— On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\times n^2 = +\infty$.

— On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\times n$ n'a pas de limite.

ATTENTION $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ peuvent avoir des limites sans que ce ne soit le cas pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 : Soit $u_n = \dfrac{\ln(n) + n^2 + 2}{\mathrm{e}^n + \sqrt{n}}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

II.5 Suites extraites

Le comportement des suites extraites à l'infini donne des indications quant au comportement de la suite initiale.

Définition 11 (Suite extraite) : Une *sous-suite* d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appelée aussi *suite extraite*, est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ est une application **strictement** croissante.

Les sous-suites que nous manipulerons le plus souvent sont les sous-suites de la forme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, on ne garde que les termes d'indice pair de la suite, et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, on garde les termes d'indice impair, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, ...

Lemme 1 :
Soit φ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n.$$

Théorème 14 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers une limite ℓ.

Alors toute sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette même limite ℓ.

En pratique, ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite N'A PAS DE LIMITE. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite comme à l' exercice (11) .

Si le comportement de la suite initiale détermine le comportement d'une suite extraite, la réciproque est beaucoup plus délicate. Une suite extraite ne pouvant, par nature, fournir qu'une information partielle sur la suite totale.

Preuve : Relativement évident à partir du lemme (1) .

S'il existe un rang $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ alors, on a aussi $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant n_0$.

Remarque : La réciproque de cette proposition est évidemment fausse. Un contre-exemple classique (qui est aussi un contre-exemple à la réciproque de la proposition sur le caractère borné des suites convergentes) est la suite définie par $u_n = (-1)^n$.

Pour cette suite, la suite extraite des indices pairs a pour limite 1 et la suite des indices impairs a pour limite -1. alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

ATTENTION

La convergence d'une ou plusieurs suites extraites n'est en général pas suffisante pour assurer la convergence d'une suite.

Il faut que l'ensemble des suites extraites considérées permette de contrôler de façon complète tous les termes de la suite (au moins à partir d'un certain rang).

Exemple 16 : Si $x \in]-1\,;1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2^n} = 0$.

On remarquera bien que la suite $\left(x^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, x^{2^n} et $(x^2)^n = x^{2n}$ n'ont rien en commun.

La suite $\left(x^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est tout simplement une suite extraite de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

Exercice 11 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{n}{9} - \left\lfloor \dfrac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$.

1. Étudier les limites des suites extraites $(u_{9n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{(3n+1)^2})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Correction : $u_{9n^2} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_{(3n+1)^2} = \left(n^2 + \dfrac{6n+1}{9}\right) - n^2 = \dfrac{6n+1}{9} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Le cas le plus important est la possibilité de récupérer la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de ses indices pairs et impairs.

Théorème 15 :
Si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Remarque : On peut facilement prolonger ce résultat à toute famille de suites extraites dont les indices forment une partition de $\mathbb{N}$.

III/ Théorèmes d'existence de limites

L'existence d'une limite n'est JAMAIS acquise.

Les théorèmes qui suivent gagnent à être connus comme de vrais théorèmes d'existence. Ce qu'ils nous fournissent de façon essentielle, ce n'est pas tant la VALEUR d'une limite que son EXISTENCE.

III.1 Théorème d'encadrement

Théorème 16 (de comparaison et d'encadrement) :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

Théorème d'encadrement :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = \ell$ et si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $m_n \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Théorème de minoration : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ et si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $m_n \leqslant u_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème de majoration : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = -\infty$ et si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $u_n \leqslant \mathrm{M}_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Preuve :

Théorème d'encadrement : Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{V}_\ell = [\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon]$ un voisinage de ℓ.

La suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Il existe donc un rang $n_1(\varepsilon, \ell, m_n)$ à partir duquel tous les termes $m_n \in \mathrm{V}_\ell$.

De même pour la suite $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe un rang $n_2(\varepsilon, \ell, \mathrm{M}_n)$ à partir duquel tous les termes $\mathrm{M}_n \in \mathrm{V}_\ell$.

Pour $n \geqslant \mathrm{N} = max(n_0, n_1, n_2)$, on a donc

$$\ell - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent donc aussi à V_ℓ à partir d'un certain rang N *i.e.* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Théorème de minoration : Soit A un réel quelconque.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$, il existe un entier $n_1(\mathrm{A}, m_n)$ tel que si $n \geqslant n_1$ alors $v_n \in [\mathrm{A}\,;+\infty[$.

Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $m_n \leqslant u_n$.

Donc si $n \geqslant \max(n_0, n_1)$ alors $\mathrm{A} \leqslant m_n \leqslant u_n \in [\mathrm{A}\,;+\infty[$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème de majoration : Identique.

CHAPITRE XIV. SUITES RÉELLES ET COMPLEXES

ATTENTION

Ne prenez pas le théorème d'encadrement pour un simple passage à la limite dans des inégalités larges.

Quand on passe à la limite dans une inégalité, on sait déjà que son membre de gauche et son membre de droite ont une limite.

Or, dans le théorème d'encadrement au contraire, seules les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n$ sont réputées exister au départ et l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en découle.

Exercice 12 (Série harmonique) : On considère la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\mathrm{H}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2}$.
2. Que dire de la convergence de $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Correction :

1. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)\\
&\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^n}\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}\\
&\geqslant 1 + \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

2. La suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas majorée. Comme elle est clairement croissante, d'après le théorème de limite monotone, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{H}_n = +\infty$.

Proposition 17 (Limite d'une suite géométrique) :
Soit $q \in \mathbb{R}$.

	$q > 1$	$q = 1$	$-1 < q < 1$	$q \leqslant -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	n'existe pas

Preuve :

Si $q > 1$ **:** $\forall\, n \geqslant 2$, $q^n = (1+(q-1))^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} (q-1)^k = 1+n(q-1)+\sum\limits_{k=2}^{n} \dbinom{n}{k} (q-1)^k \underset{q\geqslant 1}{\geqslant} n(q-1)$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n(q-1) = +\infty$ car $q > 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ d'après le théorème (16) d'encadrement.

Si $|q| < 1$ **:** Il suffit de poser $\mathrm{Q} = \dfrac{1}{|q|}$. Comme $-1 < q < 1$ alors $\mathrm{Q} > 1$.

D'après la démonstration précédente, la suite $(\mathrm{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge donc vers $+\infty$.

D'après les relations sur les limites de quotients, la suite $\left(\dfrac{1}{Q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0 et le résultat est prouvé.

Si $q = 1$: Relativement évident.

Si $q < 1$: Il suffit de regarder les suites extraites $(q^{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(q^{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ qui divergent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc divergente.

Exemple 17 (Le grand classique) : Si $x \in]-1\,;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$.

$$\text{D'où, } \lim_{n\to+\infty} 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q alors $u_n = u_o q^n$. Le théorème précédent permet donc de trouver sa limite :

Corollaire 17.1 (Limite d'une suite géométrique) :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } u_0 > 0, \\ -\infty \text{ si } u_0 < 0. \end{cases}$
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
- Si $q \leqslant -1$ et $u_0 \neq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Le théorème (16) d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 17.2 (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

$$\text{Si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée et si } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0.$$

Preuve : Soit donc K un majorant de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a immédiatement $0 \leqslant |\varepsilon_n u_n| \leqslant K|\varepsilon_n|$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} K|\varepsilon_n| = 0$, d'après le théorème d'encadrement on obtient le résultat.

Exercice 13 : On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs.

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers ℓ.

1. Montrer que si $0 < \ell < 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $\ell > 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Déterminer deux suites de nature différente dans le cas où $\ell = 1$.
4. Déterminer la nature des suites $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $a > 0$) et de $\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction :

1. Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, en posant $\varepsilon = \dfrac{\ell-1}{2} > 0$, il existe un rang $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{\ell+1}{2} < 1.$$

En posant $\ell' = \dfrac{\ell+1}{2} < 1$, $\forall\, n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant \ell' u_n$.

$1^{\text{ère}}$ **méthode :** $\forall\, n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant \ell' u_n \implies \dfrac{u_{n+1}}{\ell'^{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{\ell'^n}$.

La suite $\left(\dfrac{u_n}{\ell'^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc bornée car positive.

De plus, $\ell' \in \left]0\,;1\right[$ entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell'^n = 0$.

On conclut avec le corollaire (17.2) en remarquant que $u_n = \left(\dfrac{u_n}{\ell'^n}\right) \times \ell'^n$.

$2^{\text{ème}}$ **méthode :** À partir de l'inégalité $u_n \leqslant \ell' u_{n-1}$, on obtient :

$$\forall\, n \geqslant n_0 + 1,\quad 0 < u_n \leqslant \ell' u_{n-1} \leqslant \ell'^2 u_{n-2} \leqslant \ldots \leqslant \ell'^{n-n_0} u_{n_0} = \left(\ell'^{n_0} u_{n_0}\right) \times \ell'^n.$$

De même que précédemment, $\ell' \in \left]0\,;1\right[$ entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell'^n = 0$ et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 d'après le théorème d'encadrement.

2. Le raisonnement est identique mais en minorant par une suite géométrique divergente.

Posons $\varepsilon = \dfrac{\ell-1}{2} > 1$. Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, il existe un rang $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \geqslant n_0,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \ell - \varepsilon = \frac{\ell+1}{2}.$$

Posons $\ell' = \dfrac{\ell+1}{2}$:

$$\forall\, n \geqslant n_0 + 1,\quad u_n \geqslant \ell' u_{n-1} \geqslant \ell'^2 u_{n-2} \geqslant \ldots \leqslant \ell'^{n-n_0} u_{n_0} = \left(\ell'^{n_0} u_{n_0}\right) \times \ell'^n.$$

Comme $\ell' > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell'^n = +\infty$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ d'après le théorème de comparaison.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons $u_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = 1$ et $w_n = n$. Dans les trois cas, les quotients de deux termes consécutifs convergent vers 1 alors que les trois suites sont convergentes vers 0 et 1 ou divergentes vers $+\infty$.

4. Pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1.$$

D'après la question 1, la suite $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque : Si $a = 0$, le résultat est évident et si $a < 0$, il suffit d'appliquer le même raisonnement à la suite $\left(\dfrac{|a|^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 entraînant encore celle de $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\dfrac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{u\to0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$. Par continuité de l'exponentielle en 1,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} > 1.$$

D'après la question 2, la suite $\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Les résultats de l' exercice (13) sont à retenir :

Corollaire 17.3 (Comparaison exponentielle/factorielle) :

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Preuve : Si $x = 0$, le résultat est évident.

Si $x \neq 0$, pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{|x|^n}{n!} > 0$.

On a alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Il existe donc un rang $n_0\left(\dfrac{1}{2}\right)$ au delà duquel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

D'après l' exercice (13) , on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

III.2 Théorème de la limite monotone

Le théorème de la limite monotone est LE théorème d'EXISTENCE par excellence.

Théorème 18 (Limite monotone) :
Toute suite monotone réelle admet une limite.

Plus précisément,

1. Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
2. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

Autrement dit, toute suite monotone est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si une suite monotone est bornée elle convergera, sinon elle divergera vers $\pm\infty$. Ce théorème donne toute sa force et leur importance aux suites monotones.

Ce théorème est un théorème d'existence, il justifie l'existence d'une limite finie mais ne précise pas cette limite mais seulement que c'est sa borne supérieure.

Preuve :

1. Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, un réel strictement positif quelconque et notons $\mathrm{M} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$, le plus petit des majorants de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a déjà, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{M} < \mathrm{M}+\varepsilon$.
   - Tout intervalle $[\mathrm{M}-\varepsilon\,;\mathrm{M}+\varepsilon]$ contient au moins un terme u_p de la suite. Sinon, $\mathrm{M}-\varepsilon < \mathrm{M}$ serait un majorant de la suite, ce qui contredit le fait que M soit le plus petit des majorants.
   - Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p \geqslant \mathrm{M}-\varepsilon$.
   - L'intervalle $[\mathrm{M}-\varepsilon\,;\mathrm{M}+\varepsilon]$ contient donc tous les termes de la suite à partir du rang p. Ceci est vrai, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$.
   - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite M.

   La démonstration est identique pour une suite décroissante et minorée.
2. Soit A un nombre réel quelconque.
   - Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, on peut trouver un entier p tel que $u_p \geqslant \mathrm{A}$.
   - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$ d'où $u_n \geqslant \mathrm{A}$.

   En conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, il suffira de considérer la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante puis appliquer les propositions précédentes.

ATTENTION

Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge vers une limite ℓ mais ne donne pas la valeur de cette limite. On peut seulement dire que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par M alors $\ell \leqslant \mathrm{M}$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par m alors $\ell \geqslant m$.

La suite a une infinité de majorants ou de minorants suivant les cas mais un seul est sa limite.

La question et la difficulté sont de la trouver.

Ici encore, on voit une grande différence entre la question de prouver l'existence théorique et la recherche pratique de la dite limite qui peut demander à mettre en œuvre une quantité incommensurable de techniques qui feront les joies de vos devoirs de concours.

Exemple 18 : La suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$ est croissante et majorée par 1 donc convergente.

Mais ces arguments ne prouvent en aucun cas que sa limite est 1.

Le calcul de la limite est d'ailleurs loin d'être simple.

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fausse : si une suite diverge vers $+\infty$, elle n'est pas nécessairement croissante.

Il suffit de considérer la suite définie par $u_n = n + (-1)^n$ pour s'en convaincre.

De même, toute suite croissante majorée, donc convergente, sera un contre-exemple à une suite croissante qui ne diverge pas nécessairement vers $+\infty$ si on enlève la condition « non majorée ».

Enfin, il n'est pas nécessaire d'être monotone pour converger comme la suite définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n > 0$.

Exercice 14 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lfloor 2^k\sqrt{2} \rfloor}{3^k}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a facilement :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\lfloor 2^{n+1}\sqrt{2} \rfloor}{3^{n+1}} \geqslant 0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Elle admet donc une limite (finie ou infinie).

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k\sqrt{2}}{3^k} = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \sqrt{2} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} \leqslant 3\sqrt{2}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée. Croissante et majorée, elle est donc convergente.

À retenir 1 :
Toutes les suites ne sont pas monotones.

Dans ce cas, on tentera d'utiliser le théorème (16) de comparaison et d'encadrement qui reste un outils extrêmement puissant, l'inégalité des accroissements finis à venir ou les questions de l'énoncé...

(Hors-Programme)

Théorème 19 (Bolzano-Weierstrass (Hors-Programme)) :
De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

Ce théorème est complètement **HORS-PROGRAMME**, interdiction absolue de l'utiliser en devoir.

Cependant, il répond magnifiquement à la question de la réciproque à la proposition (9) et vous évitera peut-être d'écrire des bêtises sans réfléchir.

Preuve : Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée.

Pour une meilleure compréhension, voyons les entiers n comme des individus situés à une hauteur u_n.

— On dit que n a « vue sur mer » si : $\forall\, p \geqslant n,\ u_n \geqslant u_p$. *i.e.* n est plus haut que tous les entiers qui viennent après lui.

— On dit que n a « la vue bouchée » si : $\exists\, p \geqslant n,\ u_p > u_n$ *i.e.* il existe un entier p supérieur à n et situé plus haut que lui.

On pose alors $\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, p \geqslant n,\ u_n \geqslant u_p\}$ *i.e.* l'ensemble de tous les entiers n ayant vue sur mer.

Deux possibilités :

— Si A est infini *i.e.* il existe une infinité d'individus ayant vue sur mer, on considère la sous-suite contenant tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont l'indice appartient à A.

  Cette sous-suite est, par construction, décroissante puisque chacun de ses termes est plus grand que tous les termes suivants dans la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  Comme ladite sous-suite est, par ailleurs, minorée puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, elle converge d'après le théorème (18) de convergence monotone.

— Si A est fini, considérons un n_0 plus grand que le plus grand élément de A *i.e.* on se place au-delà de ce nombre fini et tous les individus ont alors la vue bouchée. Puisque $n_0 \notin \mathrm{A}$, il existe certainement un entier $n_1 > n_0$ pour lequel $u_{n_0} < u_{n_1}$: l'individu n_0 n'ayant pas vue sur mer, il existe certainement un individu n_1 plus haut que lui.

  De même, $n_1 \notin \mathrm{A}$, donc on peut trouver un entier n_2 tel que $u_{n_1} < u_{n_2}$. On fait de même pour l'individu n_1 qui n'a pas vue sur la mer donc un individu plus haut devant lui.

  On construit ainsi petit à petit une suite d'indices correspondant à une sous-suite croissante de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  Cette sous-suite étant majorée, elle converge.

Remarque : On a, en fait, démontré le résultat suivant : *de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone.*

Ce théorème est important car il donne l'existence d'une valeur d'adhérence non infinie. On notera cependant que la démonstration ne donne pas de construction explicite de la sous-suite. On peut même ne pas être capable d'expliciter une telle sous-suite.

Un peu d'histoire : *Il est patent que Bolzano n'a jamais énoncé le théorème dans lequel son nom est désormais lié à celui de Weierstrass. C'est à ce dernier que revient l'entière paternité du théorème. Cependant, il utilisa pour le démontrer les idées de Bolzano et la méthode qu'il avait mise au point pour son propre théorème trente années plus tôt.*

Bernhard Bolzano mourut le 18 décembre 1848, à l'âge de 67 ans, des suites d'une tuberculose. C'est dans une lettre adressée à Georg Cantor en 1870 que Hermann ***Schwarz*** *proposa, en reconnaissance du génie de Bolzano, de réunir son nom à celui de Weierstrass pour désigner le théorème.*

IV/ Suites adjacentes

Définition 12 (Suites adjacentes) : Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si et seulement si :

— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
— $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
— $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Deux telles suites ne peuvent avoir un comportement quelconque.

IV.1 Théorème des suites adjacentes

Montrons tout d'abord un résultat liminaire :

Lemme 1 :
Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ remplissant les conditions de la définition (12) .

Alors,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

Preuve : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier $p \geqslant n_0$ tel que $u_p > v_p$ *i.e.* il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_p - v_p > \mathrm{A}$.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et pour tout entier supérieur ou égal à p, on aura alors $u_n - v_n \geqslant u_p - v_p > \mathrm{A}$.

Choisissant un réel strictement positif $\varepsilon < \mathrm{A}$, l'intervalle $]-\varepsilon\,;\varepsilon[$, centré en 0 ne contiendra pas les termes de la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $n \geqslant p$, ce qui contredit le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

Théorème 20 :
Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent une même limite. [4]

Preuve :

— Montrons tout d'abord que les deux suites sont convergentes.

Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par exemple. Celle-ci étant croissante, il suffit de montrer qu'elle est majorée.

D'après le lemme (1) , il existe un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant p,\ u_n \leqslant v_n$.

Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $\forall\, n \geqslant p,\ v_n \leqslant v_p$ qui entraîne

$$\forall\, n \geqslant p,\ u_n \leqslant v_p.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée (à partir d'un certain rang).

D'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers une limite ℓ.

On montre de même que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ'.

— Enfin l'assertion $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0 \iff \ell - \ell' = 0$ entraîne que les deux suites convergent vers la même limite.

Remarque : En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$: u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ, respectivement par défaut et par excès à $v_n - u_n$ près.

Le théorème (20) a de nombreuses applications. La proposition (21) et la proposition (??) en sont deux importantes :

Exercice 15 : Montrer que les suites $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n + \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

En déduire que $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

[4]. Pas de soirée « *no limit* » pour nos suites adjacentes !

IV.2 Approximation décimale

Proposition 21 :
Soit $x \in \mathbb{R}$.

Les deux suites définies par $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune x.

Le décimal a_n est appelé *approximation décimale par défaut* de x à 10^{-n} près, et le décimal b_n *approximation décimale par excès* de x à 10^{-n} près.

Preuve : Par définition des parties entières, on a :

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1,$$

En particulier, on a déjà $a_n \leqslant x < b_n$.

En multipliant les inégalités par 10, on a aussi

$$10 \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^{n+1} x < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10. \tag{XIV.1}$$

— $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor$ étant le plus grand entier inférieur à $10^{n+1}x$, l'inégalité de gauche donne :

$$10 \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant \lfloor 10^{n+1} x \rfloor \leqslant 10^{n+1} x \implies a_n \leqslant a_{n+1}.$$

— Par définition de $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor$ et d'après l'inégalité de droite de (XIV.1), on a aussi

$$\begin{aligned} \lfloor 10^{n+1} x \rfloor \leqslant 10^{n+1} x &\implies \lfloor 10^{n+1} x \rfloor < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10 \implies \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 < 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 11 \\ &\implies \lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 \leqslant 10 \lfloor 10^n x \rfloor + 10 \implies b_{n+1} \leqslant b_n. \end{aligned}$$

On a finalement obtenu la suite d'inégalités

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant x < b_{n+1} \leqslant b_n.$$

Autrement dit, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

De plus, $b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$ a certainement une limite nulle quand n tend vers $+\infty$.

Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite.

Les encadrement donnés plus haut indiquent que cette limite commune est nécessairement inférieure ou égale à x puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par x, mais également supérieure ou égale à x puisque $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par x.

Elle est donc nécessairement égale à x.

Exemple 19 : Si $x = \pi$, on obtiendra $a_3 = 3,141$ et $b_3 = 3,142$.