Suites de référence

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 14

Sommaire I

•

Dans tout ce document, $\mathbb{K}$ désignera le corps des scalaires $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

I. Suite arithmétique

Définition 1 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un scalaire r tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I. Suite arithmétique

Définition 1 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un scalaire r tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples 1 :

- La suite des entiers naturels : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, ..., $u_n = n$, ...

I. Suite arithmétique

Définition 1 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un scalaire r tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples 1 :

- La suite des entiers naturels : $u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ \dots,\ u_n = n,\ \dots$
- La suite des multiples de 3 : $u_0 = 0,\ u_1 = 3,\ \dots,\ u_n = 3n,\ \dots$

I. Suite arithmétique

Définition 1 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un scalaire r tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples 1 :

- La suite des entiers naturels : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, ..., $u_n = n$, ...
- La suite des multiples de 3 : $u_0 = 0$, $u_1 = 3$, ..., $u_n = 3n$, ...

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison $(m < n)$	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \ldots + u_n$
$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = u_n + r$	$r = \dfrac{u_n - u_m}{n - m}$	$u_n = u_m + (n - m)r$	$(n - m + 1) \times \dfrac{u_m + u_n}{2}$

Méthode 1 (Montrer qu'une suite est arithmétique) :

Une suite est arithmétique si, et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$ donc, pour montrer :

- qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r, on exprime, pour n quelconque, $u_{n+1} - u_n$ indépendamment de n.

Méthode I (Montrer qu'une suite est arithmétique) :

Une suite est arithmétique si, et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$ donc, pour montrer :

- qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r, on exprime, pour n quelconque, $u_{n+1} - u_n$ indépendamment de n.
- qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique, on trouve deux entiers m et n tels que $u_{m+1} - u_m \neq u_{n+1} - u_n$.

II. Suite géométrique

Définition 2 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique lorsqu'il existe un scalaire q tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q.$$

Le nombre réel q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II. Suite géométrique

Définition 2 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique lorsqu'il existe un scalaire q tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q.$$

Le nombre réel q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison $(m < n)$	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \ldots + u_n$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$	$u_{n+1} = u_n \times q$	$q = \sqrt[n-m]{\dfrac{u_n}{u_m}}$	$u_n = u_m \times q^{n-m}$	$u_m(n-m+1)$ si $q = 1$. $u_m \times \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

Méthode 2 (Montrer qu'une suite est géométrique) :

Une suite est géométrique si, et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ donc, pour montrer :

- qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, on montre que u_n n'est jamais nul et on exprime, pour n quelconque, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ indépendamment de n.

Méthode 2 (Montrer qu'une suite est géométrique) :

Une suite est géométrique si, et seulement si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ donc, pour montrer :

- qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, on montre que u_n n'est jamais nul et on exprime, pour n quelconque, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ indépendamment de n.
- qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, on montre que u_n s'annule pour un certain n ou on trouve deux entiers m et n tels que $\dfrac{u_{m+1}}{u_m} \neq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^{2n}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser le premier terme et la raison.

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^{2n}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser le premier terme et la raison.
2. Calculer, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} u_k$.

III. Suite aritmético-géométrique

Définition 3 (Suite arithmético-géométrique) :

Pour tout couple de scalaires $(a\,;b)$ avec $a \neq 1$, on appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

III. Suite aritmético-géométrique

Définition 3 (Suite arithmético-géométrique) :

Pour tout couple de scalaires $(a\,;b)$ avec $a \neq 1$, on appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, on retrouve une suite arithmétique et si $b = 0$, une suite géométrique.

III. Suite aritmético-géométrique

Définition 3 (Suite arithmético-géométrique) :

Pour tout couple de scalaires $(a\,;b)$ avec $a \neq 1$, on appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, on retrouve une suite arithmétique et si $b = 0$, une suite géométrique.

Théorème 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = a^n(u_0 - c) + c \quad$ avec $\quad c = \dfrac{b}{1-a}$.

III. Suite aritmético-géométrique

Définition 3 (Suite arithmético-géométrique) :

Pour tout couple de scalaires $(a\,;b)$ avec $a \neq 1$, on appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, on retrouve une suite arithmétique et si $b = 0$, une suite géométrique.

Théorème 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - c) + c \quad \text{avec} \quad c = \dfrac{b}{1-a}.$

Le réel c, solution de l'équation $x = ax + b$, est appelé point fixe de la suite.

Méthode 3 (Plan d'étude d'une suite arithmético-géométrique) :

En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

1. Recherche du point fixe c solution de l'équation $ax + b = x$.

III. Suite aritmético-géométrique

Méthode 3 (Plan d'étude d'une suite arithmético-géométrique) :

En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

1. Recherche du point fixe c solution de l'équation $ax + b = x$.
2. Vérification que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - c$ est une suite géométrique.

III. Suite aritmético-géométrique

Méthode 3 (Plan d'étude d'une suite arithmético-géométrique) :

En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

1. Recherche du point fixe c solution de l'équation $ax + b = x$.
2. Vérification que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - c$ est une suite géométrique.
3. Conclusion : expression du terme général u_n.

Méthode 3 (Plan d'étude d'une suite arithmético-géométrique) :

En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

1. Recherche du point fixe c solution de l'équation $ax + b = x$.
2. Vérification que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - c$ est une suite géométrique.
3. Conclusion : expression du terme général u_n.

Exercice 2 :

On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

1. Déterminer le réel a pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + a$ pour tout entier naturel n soit géométrique.

III. Suite aritmético-géométrique

Méthode 3 (Plan d'étude d'une suite arithmético-géométrique) :

En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

1. Recherche du point fixe c solution de l'équation $ax + b = x$.
2. Vérification que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - c$ est une suite géométrique.
3. Conclusion : expression du terme général u_n.

Exercice 2 :

On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

1. Déterminer le réel a pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + a$ pour tout entier naturel n soit géométrique.
2. Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 3 (Plan d'étude d'une suite arithmético-géométrique) :

En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

1. Recherche du point fixe c solution de l'équation $ax + b = x$.
2. Vérification que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - c$ est une suite géométrique.
3. Conclusion : expression du terme général u_n.

Exercice 2 :

On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

1. Déterminer le réel a pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + a$ pour tout entier naturel n soit géométrique.
2. Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer les sommes $v_0 + v_1 + ... + v_{10}$ puis $u_0 + u_1 + ... + u_{10}$.

IV. Suite homographique

IV. Suite homographique

Définition 4 (Suite homographique) :

On appelle suite homographique toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \quad \text{avec} \quad ad - bc \neq 0.$$

IV. Suite homographique

Définition 4 (Suite homographique) :

On appelle suite **homographique** toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \quad \text{avec} \quad ad - bc \neq 0.$$

Remarque : Si $ad - bc = 0$, alors, de même que la fonction homographique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.

IV. Suite homographique

Définition 4 (Suite homographique) :

On appelle suite homographique toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \quad \text{avec} \quad ad - bc \neq 0.$$

Remarque : Si $ad - bc = 0$, alors, de même que la fonction homographique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.

On commence ici aussi par chercher les points fixes de la fonction associée *i.e.* les solutions de l'équation :

$$x = \frac{ax+b}{cx+d} \iff cx^2 - (a-d)x - b = 0. \tag{Hom}$$

IV. Suite homographique

Proposition 2 :

1. Si (Hom) admet deux racines distinctes α et β alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{c\beta + d}{c\alpha + d}$.

Proposition 2 :

1. Si (Hom) admet deux racines distinctes α et β alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{c\beta + d}{c\alpha + d}$.
2. Si (Hom) admet une racine double γ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - \gamma}$ est arithmétique de raison $r = \dfrac{2c}{a+d}$.

Exercice 3 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-4\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}. \end{array}$$

1. Montrer que $f(]-1\,;+\infty[) \subset]-1\,;+\infty[$.

Exercice 3 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{-4\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}. \end{array}$$

1. Montrer que $f(]-1\,;+\infty[) \subset]-1\,;+\infty[$.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Exercice 3 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\setminus\{-4\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}. \end{array}$$

1. Montrer que $f(]-1\,;+\infty[) \subset\,]-1\,;+\infty[$.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Montrer que l'application f admet -1 comme unique point fixe.

Exercice 3 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\setminus\{-4\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}. \end{array}$$

1. Montrer que $f(]-1\,;+\infty[) \subset]-1\,;+\infty[$.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Montrer que l'application f admet -1 comme unique point fixe.
4. En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-4\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}. \end{array}$$

1. Montrer que $f(]-1\,;+\infty[) \subset]-1\,;+\infty[$.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Montrer que l'application f admet -1 comme unique point fixe.
4. En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.