Chapitre

XIV Suites réelles et complexes

Deux suites adjacentes décident d'aller s'éclater dans une soirée « no limit ».

Mais elles se font refouler à l'entrée... [1]

CONTENU

Comme toujours, $\mathbb{K}$ désignera le corps des scalaires $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Notation toute personnelle : *Dans tout ce chapitre, nombre de prédicats, de définitions et de propositions ne sont vrais ou ne nécessitent d'être vrais qu'à partir d'un certain rang* $n_0 \in \mathbb{N}$.

Afin d'alléger les énoncés sans perdre en généralité, je noterai parfois $\mathbb{N}_{n_0} = \mathbb{N} \cap [n_0\,;+\infty[$ *l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à* n_0.

Ainsi, une propriété vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ *signifiera qu'elle n'est vraie qu'à partir d'un certain rang* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Rang qui importe peu.*

[1]. Un peu d'humour qui se mérite. Vous comprendrez dans ce chapitre.

I/ Suites numériques

I.1 Vocabulaire et généralités

Définition 1 : Une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

Une *suite numérique* est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

À chaque *indice* $n \in \mathbb{N}$ on associe un nombre u_n appelé *terme* de rang n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'ensemble des suites est noté $\mathcal{S}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque : Fondamentalement, cela ne change rien de considérer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang n_0.

ATTENTION $u_n \neq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$!

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rencontrées sont définies :

- de manière *explicite* : $u_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$.
- de manière *récurrente* : $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 5 - \dfrac{16}{u_n+3}. \end{cases}$
- de manière *implicite* : $\mathrm{e}^{u_n} - u_n - 2 = n$.

Définition 2 (Stabilité algébrique) : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles (ou complexes).

- La *suite somme* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite notée $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u+v)_n = u_n + v_n.$$
- Le *suite produit* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite notée $(u\times v)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u\times v)_n = u_n \times v_n.$$
- Le *suite produit de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est la suite notée $(\lambda u)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\lambda u)_n = \lambda \times u_n.$$
- Les *suites parties réelle et imaginaire* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement les suites définies par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\mathrm{Re}\,(u))_n = \mathrm{Re}\,(u_n) \quad \text{et} \quad (\mathrm{Im}\,(u))_n = \mathrm{Im}\,(u_n)\,.$$

En particulier, l'ensemble des suites réelles (ou complexe) contient la suite nulle dont tous les termes sont égaux à 0 et est stable par combinaisons linéaires : C'est un espace vectoriel réel (ou complexe). En considérant la suite produit, c'est même une $\mathbb{C}$-algèbre commutative mais non intègre.

I.2 Exemples

Définition 3 :

Suite arithmétique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* lorsqu'il existe un scalaire r, appelé *raison*, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = u_n + r.$$

Suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *géométrique* lorsqu'il existe un scalaire q, appelé *raison*, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = u_n \times q.$$

Suite arithmético-géométrique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe un couple $(a\,;b) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, la suite arithmético-géométrique précédente est une suite arithmétique, géométrique si $b = 0$.

Exemples 1 :

- La suite des entiers naturels : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, ..., $u_n = n$, ... et la suite des multiples de 3 : $u_0 = 0$, $u_1 = 3$, ..., $u_n = 3n$, ... sont des suites arithmétiques.
- La suite des puissances de 2 : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, , ..., $u_n = 2^n$... est une suite géométrique.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison $(m < n)$	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = u_n + r$	$r = \dfrac{u_n - u_m}{n - m}$	$u_n = u_m + (n-m)r$	$(n-m+1) \times \dfrac{u_m + u_n}{2}$

Figure XIV.1 – $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Exercice 1 : Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = 2$ et $z_{n+1} = 2z_n + 2^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Montrer que la suite de terme général $t_n = \dfrac{z_n}{2^n}$ est arithmétique et en déduire une expression explicite de z_n.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison $(m < n)$	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$	$u_{n+1} = u_n \times q$	$q = \sqrt[n-m]{\dfrac{u_n}{u_m}}$	$u_n = u_m \times q^{n-m}$	$u_m(n-m+1)$ si $q = 1$.
				$u_m \times \dfrac{1 - q^{n-m+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

Figure XIV.2 – $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

I.3 Suites bornées

Définition 4 (Suites réelles majorées, minorées, bornées) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- *majorée* s'il existe un réel M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \mathrm{M}$.
- *minorée* s'il existe un réel m tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$.
- *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

ATTENTION

Les majorants (ou minorants) d'une suite sont, par définition des constantes.

Une majoration (une minoration) de u_n par un réel **qui dépend** de n ne montre **PAS** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (ou minorée).

Exemples 2 :

- La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par -1. Elle est donc bornée.
- La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.

  En revanche, elle n'est pas majorée (et donc non bornée).
- Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Méthode 1 (Encadrer une suite) :
Avant de se lancer, on réfléchira à la méthode la plus adaptée :

- En général, on étudie le signe de la différence $u_n - m$ ou $u_n - \mathrm{M}$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut utiliser le tableau de variations de la fonction f pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, minorée ou bornée.
- Si le terme général est donné sous la forme d'un quotient, on peut majorer/minorer numérateur et dénominateur.

Exercice 2 : Soit $\alpha \in \,]0\,;1[$ fixé.

1. Montrer que $\forall\, x \in \,]-1\,;+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\alpha^k\right)$ est bornée.

Méthode 2 (Suite non majorée) :
Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée :

- On se donne un réel A quelconque.
- On montre que l'on peut toujours trouver un terme de la suite plus grand que A en résolvant, par exemple, l'inéquation $u_n \geqslant \mathrm{A}$.

Proposition 1 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée si, et seulement si la suite } (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée.}$$

Définition 5 (Suite complexe bornée) : Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si la suite réelle positive $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Exemple 3 : $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{in}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Proposition 2 :
Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \iff (\mathrm{Re}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (\mathrm{Im}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont bornées.}$$

Exercice 3 : Montrer que l'ensemble des suites bornées est non vide, est stable par combinaisons linéaires, produits, et produits par un scalaire.

Définition 6 (Relation de domination) : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *dominée* par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On note alors $u_n = \mathrm{O}\,(v_n)$.

Remarque : D'après la proposition (1) ,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\,(v_n) \iff \exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\quad |u_n| \leqslant \mathrm{M}\,|v_n|\,.$$

Exemples 4 :
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $u_n = \mathrm{O}\,(1)$.
- $2n^2 + 1 = \mathrm{O}\,(n^2)$ et $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

[1]. **Edmund Georg Hermann Landau** (Berlin, 14 février **1877** - Berlin, 19 février **1938**) est un mathématicien allemand juif, auteur de 253 publications mathématiques, en grande partie sur la théorie des nombres.

I.4 Variations

Définition 7 (Suites monotones) : On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :

- *croissante* si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
- *décroissante* si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \geqslant u_{n+1}$.
- *stationnaire* si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n = u_{n+1}$.

Une suite croissante ou décroissante est dite *monotone*.

On parlera aussi de suites *strictement monotones* lorsque les inégalités larges ci-dessus seront remplacées par des inégalités strictes.

ATTENTION

1. La notion de suites monotones n'existe pas pour les suites à valeurs complexes.
2. Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissante, ni monotones, ni rien.

Exemples 5 :

- $u_n = (-1)^n$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$, $u_n = \tan(n)$ ne sont pas monotones.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(100-k)$ est stationnaire à 0 à partir du rang $n = 100$.

Exercice 4 : Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \cos\left(\dfrac{2\pi n!}{p!}\right)$.

Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Proposition 3 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :
   - si $r \geqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
   - si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,
   - si $r \leqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison q relativement à 1 et le signe de son premier terme u_0 :
   - Si $q = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à 0 à partir de son deuxième terme.
   - si $u_0 \geqslant 0$ et $q > 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante(strictement si $u_0 > 0$).
   - Si $q = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à u_0.
   - Si $u_0 \geqslant 0$ et $0 < q < 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (strictement si $u_0 > 0$).
   - Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Comparez deux termes d'une suite est difficile à faire directement. On se ramène donc encore à comparer leur différence à 0 ou leur quotient à 1.

Méthode 3 (Montrer qu'une suite est croissante) :
Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

— On exprime $u_{n+1} - u_n$, on factorise, réduit au même dénominateur, ...
— À l'aide d'un tableau de signes, on montre que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Méthode 4 (Montrer qu'une suite est croissante) :
Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous forme multiplicative et à termes strictement positifs est croissante :

— On exprime $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, on factorise, simplifie majore, minore, ...
— On montre le numérateur est plus grand que le dénominateur *i.e.* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

Exercice 5 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$.

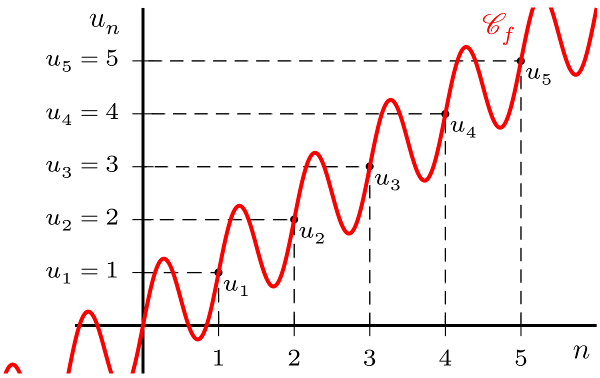
Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Proposition 4 (Suites définies explicitement par une fonction) :
Soient f une fonction définie sur $[n_0\,;+\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n = f(n).$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même monotonie que la fonction. La réciproque est fausse.

Soit la fonction $f : x \longmapsto x + \sin(2\pi x)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$.



— $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = n + \sin(2\pi n) = n$ [a]. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
— La fonction, représentée en rouge, n'est même pas monotone.

a. $\sin(0\pi) = \sin(2\pi) = \sin(3\pi) = \sin(4\pi) = ... = 0\,!$

II/ Comportement asymptotique des suites

II.1 Convergence et divergence

Définition 8 (Limite d'une suite réelle) : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si tout voisinage de ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists\, n_o(\mathrm{V}_\ell) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \in \mathrm{V}_\ell.$$

En particulier :

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *divergente* vers $+\infty$ si :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, n_o(\mathrm{A}) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \geqslant \mathrm{A}.$$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *divergente* vers $-\infty$ si :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, n_o(\mathrm{A}) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \leqslant \mathrm{A}.$$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge* si elle ne converge pas.

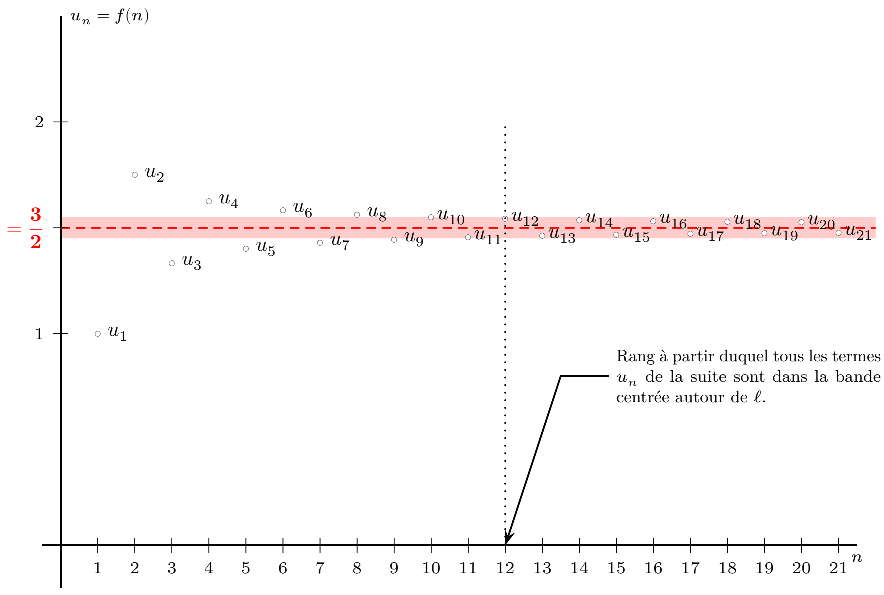


Figure XIV.3 – La suite définie par $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{2n}$ converge vers $\ell = \dfrac{3}{2}$.

Rappel 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \iff u_n \in [\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon] \iff \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$

ATTENTION | Le contraire de convergent n'est pas divergent vers l'infini !

Exemple 6 : La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

En effet, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend que les valeurs 1 et -1 donc ne peut converger que vers une de ces valeurs.

Comme $\left[\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{4}{3}\right]$ est un voisinage de 1 ne contenant pas $u_{2n+1} = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 1. De même avec $\left[-\dfrac{4}{3}\,;-\dfrac{2}{3}\right]$ et $u_{2n} = 1$, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers -1.

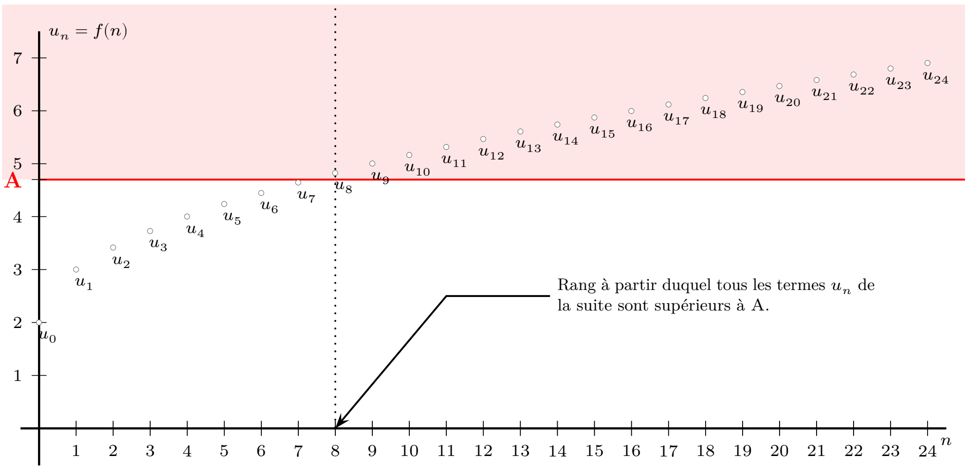


Figure XIV.4 – La suite définie par $u_n = \sqrt{n} + 2$ diverge vers $+\infty$.

Remarques : Le comportement asymptotique d'une suite ne dépend que du comportement de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple 7 : La suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Tout intervalle $[-a\,;a]$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$, contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir du rang $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{a} \right\rfloor + 1$.

Définition 9 (Limite d'une suite complexe) : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* vers $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

ATTENTION La notion de suites complexes divergeant vers l'infini ne veut rien dire dans $\mathbb{C}$!

Proposition 5 :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(\ell). \end{cases}$

   En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \overline{u_n} = \overline{\ell}$.

Corollaire 5.1 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|.$$

ATTENTION La réciproque est fausse. Il suffit de considérer la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$.

   Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si elle est stationnaire.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ *i.e.* $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+p} = u_n$.

   Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors elle est constante.

Proposition 6 :
Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Si, $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Proposition 7 :

1. $\forall\, p \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et $(n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.
2. $\forall\, q \in]-1\,;1[$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exemple 8 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall\, n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\right)^n$ converge vers 0.

Corollaire 7.1 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge (vers } \pm\infty) \text{ si, et seulement si } r \neq 0.$$

Exercice 7 : Montrer que $[0\,;1] = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[0\,;1+\frac{1}{n}\right]$.

Théorème 8 :

Si une suite converge alors sa limite est unique.

Par la contraposée, si une suite possède plusieurs limites [2] alors elle diverge.

Exercice 8 (Série harmonique) : On considère la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. Que dire de la convergence de $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 9 (Lemme de Cesàro - complément de cours) : Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe et c la suite de terme général

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En utilisant la définition de la limite, montrer que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. En déduire que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$, alors $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose maintenant que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer qu'il en est de même pour c_n.
5. Application : montrer que si une suite vérifie $a_{n+1} - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}^*$, alors $\dfrac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

[2]. En mathématiques, on parle plutôt de valeurs d'adhérence. C'est mieux que de parler de plusieurs limites alors que l'on vient de dire qu'elle était unique.

II.2 Limite et relation d'ordre

Proposition 9 :
Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

ATTENTION La réciproque est encore fausse toujours en considérant $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exemple 9 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall\, n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (1+\mathrm{i})^n$ diverge.

Corollaire 9.1 :

1. Toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement positif ou divergeant vers $+\infty$ est minorée par un réel m strictement positif à partir d'un certain rang.
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell > 0 \implies \exists\, m \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \geqslant m > 0.$$
2. Toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement négatif ou divergeant vers $-\infty$ est majorée par un réel M strictement négatif à partir d'un certain rang.
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell < 0 \implies \exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant \mathrm{M} < 0.$$

Théorème 10 (Limites et inégalités strictes) :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel ℓ et et m, $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \mathrm{M}$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $u_n < \mathrm{M}$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > m$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $u_n > m$.

Théorème 11 (Limites et inégalités larges) :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles possédant une limite finie.

$$\text{Si } \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant v_n \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Exemple 10 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente avec $u_n \leqslant \mathrm{A}$ à partir d'un certain rang.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \mathrm{A}$.

ATTENTION C'est **TRÈS** faux avec des inégalités STRICTES ! Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

CHAPITRE XIV. SUITES RÉELLES ET COMPLEXES

II.3 Composition par une fonction

Théorème 12 (Composition à gauche par une fonction) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathrm{I}}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une application et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I.

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Exemples 11 (Importants) :

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si f est continue en a et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x$.

Exemples 12 :

- $\arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0$ alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ indépendant de n.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- $n^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

ATTENTION

Les derniers exemples montrent que 1^∞ est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \not\Longrightarrow u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

De même ∞^0 est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \not\Longrightarrow u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

En tout état de cause, il faudrait en rajouter d'autres : 0^0, 0^∞ et ∞^∞ que nous traiterons au cas par cas en nous ramenant aux précédentes.

Corollaire 12.1 (Limites usuelles et croissances comparées) :
Puissances de n : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha$	0	1	$+\infty$

Croissances comparées : Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, $q > 1$ et $x \in]-1\,;1[$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = 0$

II.4 Opérations sur les limites

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) : On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
  - $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- On ajoute deux symboles 0^+ et 0^- vérifiant pour $a \neq 0$:
  - $a \times 0^+ = 0^{\text{signe }(a)}$
  - $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$
  - $\dfrac{1}{+\infty} = 0^+$
  - $a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$
  - $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$
  - $\dfrac{1}{-\infty} = 0^-$.

Les quotients $\dfrac{a}{b}$ s'obtiennent comme $a \times \dfrac{1}{b}$ si l'opération est définie.

ATTENTION Les opérations $(+\infty)+(-\infty)$, $0\times(+\infty)$, $0\times(-\infty)$, $\dfrac{0^\pm}{0^\pm}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(0^\pm)^{\pm\infty}$ et $(\pm\infty)^{0^\pm}$ ne sont pas définies et appelées « formes indéterminées », c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles qu'ils faudra... déterminer.

Proposition 13 :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant des limites ℓ et ℓ'.

Somme :

Si $\ell + \ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Multiple :

Si $\lambda.\ell$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\lambda.u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda.\ell$.

Produit :

Si $\ell \times \ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $u_n \times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \times \ell'$.

Inverse :

Si $\dfrac{1}{\ell}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$.

CHAPITRE XIV. SUITES RÉELLES ET COMPLEXES

Quotient :

Si $\frac{\ell}{\ell'}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell}{\ell'}$.

ATTENTION L'ensemble des suites divergentes N'EST PAS stable par combinaisons linéaires.

Exemples 13 :

- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty \quad \Longrightarrow \frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Exemple 14 (Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$) :

— On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+\ell) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} ((n+\ell)-n) = \ell$.

— On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-n) = +\infty$.

— On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} n + (-1)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+(-1)^n-n)$ n'a pas de limite.

ATTENTION $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut avoir une limite sans que ce ne soit le cas pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 15 (Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$) :

— On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ell}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ell}{n} \times n = \ell$.

— On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times n^2 = +\infty$.

— On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \times n$ n'a pas de limite.

ATTENTION $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ peuvent avoir des limites sans que ce ne soit le cas pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 : Soit $u_n = \frac{\ln(n)+n^2+2}{e^n+\sqrt{n}}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

II.5 Suites extraites

Définition 11 (Suite extraite) : Une *sous-suite* d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appelée aussi *suite extraite*, est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ est une application **strictement** croissante.

Lemme 1 :
Soit φ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n.$$

Théorème 14 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers une limite ℓ.

Alors toute sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette même limite ℓ.

En pratique, ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite N'A PAS DE LIMITE. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite comme à l' exercice (11) .

ATTENTION

La convergence d'une ou plusieurs suites extraites n'est en général pas suffisante pour assurer la convergence d'une suite.

Il faut que l'ensemble des suites extraites considérées permette de contrôler de façon complète tous les termes de la suite (au moins à partir d'un certain rang).

Exemple 16 : Si $x \in]-1\,;1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2^n} = 0$.

On remarquera bien que la suite $\left(x^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, x^{2^n} et $(x^2)^n = x^{2n}$ n'ont rien en commun.

La suite $\left(x^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est tout simplement une suite extraite de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

Exercice 11 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{n}{9} - \left\lfloor \dfrac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$.

1. Étudier les limites des suites extraites $(u_{9n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{(3n+1)^2})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Théorème 15 :
Si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

III/ Théorèmes d'existence de limites

III.1 Théorème d'encadrement

Théorème 16 (de comparaison et d'encadrement) :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

Théorème d'encadrement :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = \ell$ et si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $m_n \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Théorème de minoration : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ et si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $m_n \leqslant u_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème de majoration : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = -\infty$ et si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $u_n \leqslant \mathrm{M}_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

ATTENTION

Ne prenez pas le théorème d'encadrement pour un simple passage à la limite dans des inégalités larges.

Quand on passe à la limite dans une inégalité, on sait déjà que son membre de gauche et son membre de droite ont une limite.

Or, dans le théorème d'encadrement au contraire, seules les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n$ sont réputées exister au départ et l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en découle.

Exercice 12 (Série harmonique) : On considère la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2}$.
2. Que dire de la convergence de $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Proposition 17 (Limite d'une suite géométrique) :
Soit $q \in \mathbb{R}$.

	$q > 1$	$q = 1$	$-1 < q < 1$	$q \leqslant -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	n'existe pas

Exemple 17 (Le grand classique) : Si $x \in]-1\,;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$.

$$\text{D'où, } \lim_{n\to+\infty} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Corollaire 17.1 (Limite d'une suite géométrique) :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

— Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
— Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } u_0 > 0, \\ -\infty \text{ si } u_0 < 0. \end{cases}$
— Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
— Si $q \leqslant -1$ et $u_0 \neq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Corollaire 17.2 (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

$$\text{Si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée et si } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0.$$

Exercice 13 : On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs.

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers ℓ.

1. Montrer que si $0 < \ell < 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $\ell > 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Déterminer deux suites de nature différente dans le cas où $\ell = 1$.
4. Déterminer la nature des suites $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $a > 0$) et de $\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Corollaire 17.3 (Comparaison exponentielle/factorielle) :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

III.2 Théorème de la limite monotone

Théorème 18 (Limite monotone) :
Toute suite monotone réelle admet une limite.

Plus précisément,

1. Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
2. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

Autrement dit, toute suite monotone est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

ATTENTION Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge vers une limite ℓ mais ne donne pas la valeur de cette limite. On peut seulement dire que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par M alors $\ell \leqslant \mathrm{M}$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par m alors $\ell \geqslant m$.

Exemple 18 : La suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$ est croissante et majorée par 1 donc convergente.

Mais ces arguments ne prouvent en aucun cas que sa limite est 1.

Le calcul de la limite est d'ailleurs loin d'être simple.

ATTENTION La réciproque de ce théorème est fausse : si une suite diverge vers $+\infty$, elle n'est pas nécessairement croissante.

Il suffit de considérer la suite définie par $u_n = n + (-1)^n$ pour s'en convaincre.

De même, toute suite croissante majorée, donc convergente, sera un contre-exemple à une suite croissante qui ne diverge pas nécessairement vers $+\infty$ si on enlève la condition « non majorée ».

Enfin, il n'est pas nécessaire d'être monotone pour converger comme la suite définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n > 0$.

Exercice 14 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\left\lfloor 2^k\sqrt{2}\right\rfloor}{3^k}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

À retenir 1 :
Toutes les suites ne sont pas monotones.

Dans ce cas, on tentera d'utiliser le théorème (16) de comparaison et d'encadrement qui reste un outils extrêmement puissant, l'inégalité des accroissements finis à venir ou les questions de l'énoncé...

IV/ Suites adjacentes

Définition 12 (Suites adjacentes) : Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si et seulement si :

— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
— $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
— $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

IV.1 Théorème des suites adjacentes

Lemme 1 :
Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ remplissant les conditions de la définition (12) .

Alors,
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

Théorème 19 :
Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent une même limite. [3]

Remarque : En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$: u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ, respectivement par défaut et par excès à $v_n - u_n$ près.

Exercice 15 : Montrer que les suites $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes.

En déduire que $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

IV.2 Approximation décimale

Proposition 20 :
Soit $x \in \mathbb{R}$.

Les deux suites définies par $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune x.

Le décimal a_n est appelé *approximation décimale par défaut* de x à 10^{-n} près, et le décimal b_n *approximation décimale par excès* de x à 10^{-n} près.

Exemple 19 : Si $x = \pi$, on obtiendra $a_3 = 3,141$ et $b_3 = 3,142$.

[3]. Pas de soirée « *no limit* » pour nos suites adjacentes !