Suites réelles et complexes

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 14

Sommaire I

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique).

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul.

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul.

On en trouve, par exemple, chez Archimède, pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700av. J.-C. et plus récemment au I$^{\text{er}}$ siècle apr. J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie :

Pour extraire la racine carrée de A*, choisir une expression arbitraire* a *et prendre la moyenne entre* a *et* $\dfrac{\mathrm{A}}{a}$ *et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent*

En notation moderne, cela définit la suite de nombres $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{\mathrm{A}}{u_n}\right).$$

On retrouve ensuite cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du XV$^{\text{ème}}$ siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval). Dans l'Encyclopédie Raisonnée de d'Alembert et Diderot (1751), une grande part est laissée aux suites et séries dont le principal intérêt semble être leur convergence.

On retrouve ensuite cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du XV$^{\text{ème}}$ siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval). Dans l'Encyclopédie Raisonnée de d'Alembert et Diderot (1751), une grande part est laissée aux suites et séries dont le principal intérêt semble être leur convergence.

C'est ainsi que l'on voit Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle. L'étude des suites numérique ouvre la porte à bien d'autres notions séquentielle comme les suites de fonctions, séries, séries entières ou de Fourier. Voyez ce chapitre comme leur préambule.

Comme toujours, $\mathbb{K}$ désignera l'un ou l'autre des corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Notation toute personnelle : *Dans tout ce chapitre, nombre de prédicats, de définitions et de propositions ne sont vrais ou ne nécessitent d'être vrais qu'à partir d'un certain rang* $n_0 \in \mathbb{N}$.

Afin d'alléger les énoncés sans perdre en généralité, je noterai parfois $\mathbb{N}_{n_0} = \mathbb{N} \cap [n_0 ; +\infty[$ *l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à* n_0.

Ainsi, une propriété vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ *signifiera qu'elle n'est vraie qu'à partir d'un certain rang* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Rang qui importe peu.*

Définition I :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

Une suite numérique est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

À chaque indice $n \in \mathbb{N}$ on associe un nombre u_n appelé terme de rang n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'ensemble des suites est noté $\mathcal{S}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque : Fondamentalement, cela ne change rien de considérer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang n_0.

ATTENTION

$u_n \neq (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$!

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rencontrées sont définies :

- de manière explicite : $u_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$.

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rencontrées sont définies :

- de manière explicite : $u_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$.
- de manière récurrente : $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 5 - \dfrac{16}{u_n+3}. \end{cases}$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rencontrées sont définies :

- de manière explicite : $u_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$.
- de manière récurrente : $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 5 - \dfrac{16}{u_n+3}. \end{cases}$
- de manière implicite : $\mathrm{e}^{u_n} - u_n - 2 = n$.

L'ensemble des suites réelles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est naturellement muni d'opérations de somme (on additionne les deux suites terme à terme), de produit et de produit par un réel.

Définition 2 (Stabilité algébrique) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles (ou complexes).

- La suite somme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite notée $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u+v)_n = u_n + v_n.$$

Définition 2 (Stabilité algébrique) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles (ou complexes).

- La suite somme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite notée $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u+v)_n = u_n + v_n.$$
- Le suite produit de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite notée $(u\times v)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u\times v)_n = u_n \times v_n.$$

Définition 2 (Stabilité algébrique) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles (ou complexes).

- La suite somme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite notée $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u+v)_n = u_n + v_n.$$
- Le suite produit de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite notée $(u \times v)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u \times v)_n = u_n \times v_n.$$
- Le suite produit de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est la suite notée $(\lambda u)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\lambda u)_n = \lambda \times u_n.$$

Définition 2 (Stabilité algébrique) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles (ou complexes).

- La suite somme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite notée $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u+v)_n = u_n + v_n.$$
- Le suite produit de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite notée $(u\times v)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (u\times v)_n = u_n \times v_n.$$
- Le suite produit de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est la suite notée $(\lambda u)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\lambda u)_n = \lambda \times u_n.$$
- Les suites parties réelle et imaginaire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement les suites définies par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left(\mathrm{Re}\,(u)\right)_n = \mathrm{Re}\,(u_n) \quad \text{et} \quad \left(\mathrm{Im}\,(u)\right)_n = \mathrm{Im}\,(u_n).$$

En particulier, l'ensemble des suites réelles (ou complexe) contient la suite nulle dont tous les termes sont égaux à 0 et est stable par combinaisons linéaires : C'est un espace vectoriel réel (ou complexe).

En particulier, l'ensemble des suites réelles (ou complexe) contient la suite nulle dont tous les termes sont égaux à 0 et est stable par combinaisons linéaires : C'est un espace vectoriel réel (ou complexe).

En considérant la suite produit, c'est même une $\mathbb{C}$-algèbre commutative mais non intègre.

Définition 3 :

Suite arithmétique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un scalaire r, appelé raison, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Définition 3 :

Suite arithmétique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un scalaire r, appelé raison, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique lorsqu'il existe un scalaire q, appelé raison, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q.$$

Définition 3 :

Suite arithmétique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un scalaire r, appelé raison, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique lorsqu'il existe un scalaire q, appelé raison, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q.$$

Suite arithmético-géométrique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique lorsqu'il existe un couple $(a\,;b) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Définition 3 :

Suite arithmétique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un scalaire r, appelé raison, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique lorsqu'il existe un scalaire q, appelé raison, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q.$$

Suite arithmético-géométrique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique lorsqu'il existe un couple $(a\,;b) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Définition 3 :

Suite arithmétique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe un scalaire r, appelé raison, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = u_n + r.$$

Suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique lorsqu'il existe un scalaire q, appelé raison, tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = u_n \times q.$$

Suite arithmético-géométrique : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique lorsqu'il existe un couple $(a\,;b) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, la suite arithmético-géométrique précédente est une suite arithmétique, géométrique si $b = 0$.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison $(m < n)$	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \ldots + u_n$
$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = u_n + r$	$r = \dfrac{u_n - u_m}{n - m}$	$u_n = u_m + (n-m)r$	$(n - m + 1) \times \dfrac{u_m + u_n}{2}$

Figure 1 – $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison $(m < n)$	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = u_n + r$	$r = \dfrac{u_n - u_m}{n - m}$	$u_n = u_m + (n-m)r$	$(n-m+1) \times \dfrac{u_m + u_n}{2}$

Figure 1 – $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison $(m < n)$	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$	$u_{n+1} = u_n \times q$	$q = \sqrt[n-m]{\dfrac{u_n}{u_m}}$	$u_n = u_m \times q^{n-m}$	$u_m(n-m+1)$ si $q = 1$. $u_m \times \dfrac{1 - q^{n-m+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

Figure 2 – $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Exemples 1 :

- La suite des entiers naturels : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, ..., $u_n = n$, ... et la suite des multiples de 3 : $u_0 = 0$, $u_1 = 3$, ..., $u_n = 3n$, ... sont des suites arithmétiques.

Exemples 1 :

- La suite des entiers naturels : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, ..., $u_n = n$, ... et la suite des multiples de 3 : $u_0 = 0$, $u_1 = 3$, ..., $u_n = 3n$, ... sont des suites arithmétiques.
- La suite des puissances de 2 : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, , ..., $u_n = 2^n$... est une suite géométrique.

Exemples 1 :

- La suite des entiers naturels : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, ..., $u_n = n$, ... et la suite des multiples de 3 : $u_0 = 0$, $u_1 = 3$, ..., $u_n = 3n$, ... sont des suites arithmétiques.
- La suite des puissances de 2 : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, , ..., $u_n = 2^n$... est une suite géométrique.

Exercice 1 :

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = 2$ et $z_{n+1} = 2z_n + 2^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Montrer que la suite de terme général $t_n = \dfrac{z_n}{2^n}$ est arithmétique et en déduire une expression explicite de z_n.

Définition 4 (Suites réelles majorées, minorées, bornées) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- majorée s'il existe un réel M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \mathrm{M}$.

Définition 4 (Suites réelles majorées, minorées, bornées) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- majorée s'il existe un réel M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{M}$.
- minorée s'il existe un réel m tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.

Définition 4 (Suites réelles majorées, minorées, bornées) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- majorée s'il existe un réel M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \mathrm{M}$.
- minorée s'il existe un réel m tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$.
- bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Définition 4 (Suites réelles majorées, minorées, bornées) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- majorée s'il existe un réel M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \mathrm{M}$.
- minorée s'il existe un réel m tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$.
- bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

ATTENTION

Les majorants (ou minorants) d'une suite sont, par définition des constantes.

Une majoration (une minoration) de u_n par un réel **qui dépend** de n ne montre **PAS** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (ou minorée).

Exemples 2 :

- La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par -1. Elle est donc bornée.

Exemples 2 :

- La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par -1. Elle est donc bornée.
- La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
  En revanche, elle n'est pas majorée (et donc non bornée).

Exemples 2 :

- La suite $\Big((-1)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par -1. Elle est donc bornée.
- La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
  En revanche, elle n'est pas majorée (et donc non bornée).
- Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Méthode 1 :

Avant de se lancer dans l'encadrement d'une suite, on réfléchira à la méthode la plus adaptée :

- En général, on étudie le signe de la différence $u_n - m$ ou $u_n - \mathrm{M}$.

Méthode 1 :

Avant de se lancer dans l'encadrement d'une suite, on réfléchira à la méthode la plus adaptée :

- En général, on étudie le signe de la différence $u_n - m$ ou $u_n - \mathrm{M}$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut utiliser le tableau de variations de la fonction f pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, minorée ou bornée.

Méthode 1 :

Avant de se lancer dans l'encadrement d'une suite, on réfléchira à la méthode la plus adaptée :

- En général, on étudie le signe de la différence $u_n - m$ ou $u_n - \mathrm{M}$.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut utiliser le tableau de variations de la fonction f pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, minorée ou bornée.
- Si le terme général est donné sous la forme d'un quotient, on peut majorer/minorer numérateur et dénominateur.

Exercice 2 :

Soit $\alpha \in \,]0\,;1[$ fixé.

1. Montrer que $\forall\, x \in \,]-1\,;+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 2 :

Soit $\alpha \in \left]0\,;1\right[$ fixé.

1. Montrer que $\forall\, x \in \left]-1\,;+\infty\right[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\alpha^k\right)$ est bornée.

Méthode 2 :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée :

- On se donne un réel A quelconque.

Méthode 2 :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée :

- On se donne un réel A quelconque.
- On montre que l'on peut toujours trouver un terme de la suite plus grand que A en résolvant, par exemple, l'inéquation $u_n \geqslant A$.

Proposition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée si, et seulement si la suite } \left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée.}$$

Proposition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée si, et seulement si la suite } \left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée.}$$

Cette propriété permet d'étendre la définition de suite bornée aux suites à valeurs complexes en faisant appel au module :

Proposition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée si, et seulement si la suite } \left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée.}$$

Cette propriété permet d'étendre la définition de suite bornée aux suites à valeurs complexes en faisant appel au module :

Définition 5 (Suite complexe bornée) :

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si la suite réelle positive $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Proposition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si la suite $\left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Cette propriété permet d'étendre la définition de suite bornée aux suites à valeurs complexes en faisant appel au module :

Définition 5 (Suite complexe bornée) :

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si la suite réelle positive $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Exemple 3 :

$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

À l'aide de l'inégalité triangulaire, on démontre sans peine le résultat suivant :

Proposition 2 :

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \quad\Longleftrightarrow\quad \left(\mathrm{Re}\left(z_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \left(\mathrm{Im}\left(z_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont bornées.}$$

À l'aide de l'inégalité triangulaire, on démontre sans peine le résultat suivant :

Proposition 2 :

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\mathrm{Re}\,(z_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \left(\mathrm{Im}\,(z_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont bornées.}$$

Exercice 3 :

Montrer que l'ensemble des suites bornées est non vide, est stable par combinaisons linéaires, produits, et produits par un scalaire.

À l'aide de l'inégalité triangulaire, on démontre sans peine le résultat suivant :

Proposition 2 :

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\mathrm{Re}\,(z_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \left(\mathrm{Im}\,(z_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont bornées.}$$

Exercice 3 :

Montrer que l'ensemble des suites bornées est non vide, est stable par combinaisons linéaires, produits, et produits par un scalaire.

On dit que l'ensemble des suites bornées muni des trois opérations $+$, $\times$ et de la multiplication par un scalaire vue comme loi externe est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Définition 6 (Relation de domination) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On note alors $u_n = \mathrm{O}\,(v_n)$.

Définition 6 (Relation de domination) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On note alors $u_n = \mathrm{O}\left(v_n\right)$.

Cette notation est dû à Landau :

- On lit aussi « u_n est un un grand O de v_n. »

Définition 6 (Relation de domination) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On note alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

Cette notation est dû à Landau :

- On lit aussi « u_n est un un grand O de v_n. »
- On écrit aussi $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ même s'il est assez clair que la domination ne se fait qu'au voisinage de l'infini où à partir d'un certain rang.

Définition 6 (Relation de domination) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On note alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

Cette notation est dû à Landau :

- On lit aussi « u_n est un un grand O de v_n. »
- On écrit aussi $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ même s'il est assez clair que la domination ne se fait qu'au voisinage de l'infini où à partir d'un certain rang.

Remarque : D'après la proposition (1) ,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n) \iff \exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\quad |u_n| \leqslant \mathrm{M}\,|v_n|.$$

Exemples 4 (Stabilité algébrique de la relation de domination) :

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $u_n = \mathrm{O}\,(1)$.

Exemples 4 (Stabilité algébrique de la relation de domination) :

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $u_n = \mathrm{O}(1)$.
- $2n^2+1 = \mathrm{O}\left(n^2\right)$ et $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exemples 4 (Stabilité algébrique de la relation de domination) :

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $u_n = \mathrm{O}\left(1\right)$.
- $2n^2+1 = \mathrm{O}\left(n^2\right)$ et $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
- $\begin{cases} u_n = \mathrm{O}\left(w_n\right) \\ v_n = \mathrm{O}\left(w_n\right) \end{cases} \implies u_n + v_n = \mathrm{O}\left(w_n\right)$.

Exemples 4 (Stabilité algébrique de la relation de domination) :

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $u_n = \mathrm{O}(1)$.
- $2n^2+1 = \mathrm{O}\left(n^2\right)$ et $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
- $\begin{cases} u_n = \mathrm{O}(w_n) \\ v_n = \mathrm{O}(w_n) \end{cases} \implies u_n + v_n = \mathrm{O}(w_n)$.
- $\begin{cases} u_n = \mathrm{O}(w_n) \\ v_n = \mathrm{O}(w'_n) \end{cases} \implies u_n \times v_n = \mathrm{O}(w_n \times w'_n)$.

Définition 7 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :

- croissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.

Définition 7 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :

- croissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- décroissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Définition 7 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :

- croissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
- décroissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \geqslant u_{n+1}$.
- stationnaire si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n = u_{n+1}$.

Définition 7 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :

- croissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
- décroissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \geqslant u_{n+1}$.
- stationnaire si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n = u_{n+1}$.

Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

Définition 7 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :

- croissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
- décroissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \geqslant u_{n+1}$.
- stationnaire si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n = u_{n+1}$.

Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

On parlera aussi de suites strictement monotones lorsque les inégalités larges ci-dessus seront remplacées par des inégalités strictes.

Définition 7 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :

- croissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
- décroissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \geqslant u_{n+1}$.
- stationnaire si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n = u_{n+1}$.

Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

On parlera aussi de suites strictement monotones lorsque les inégalités larges ci-dessus seront remplacées par des inégalités strictes.

ATTENTION

1. La notion de suites monotones n'existe pas pour les suites à valeurs complexes.

Définition 7 (Suites monotones) :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :

- croissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
- décroissante si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \geqslant u_{n+1}$.
- stationnaire si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n = u_{n+1}$.

Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

On parlera aussi de suites strictement monotones lorsque les inégalités larges ci-dessus seront remplacées par des inégalités strictes.

ATTENTION

1. La notion de suites monotones n'existe pas pour les suites à valeurs complexes.
2. Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissante, ni monotones, ni rien.

Exemples 5 :

- $u_n = (-1)^n$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$, $u_n = \tan(n)$ ne sont pas monotones.

Exemples 5 :

- $u_n = (-1)^n$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$, $u_n = \tan(n)$ ne sont pas monotones.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(100-k)$ est stationnaire à 0 à partir du rang $n = 100$.

Exemples 5 :

- $u_n = (-1)^n$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$, $u_n = \tan(n)$ ne sont pas monotones.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(100-k)$ est stationnaire à 0 à partir du rang $n = 100$.

Exercice 4 :

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \cos\left(\dfrac{2\pi n!}{p!}\right)$.

Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Proposition 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :

Proposition 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :
   - si $r \geqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,

Proposition 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :
   - si $r \geqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
   - si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,

Proposition 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :
   - si $r \geqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
   - si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,
   - si $r \leqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,

Proposition 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :
   - si $r \geqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
   - si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,
   - si $r \leqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison q relativement à 1 et le signe de son premier terme u_0 :

Proposition 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :
   - si $r \geqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
   - si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,
   - si $r \leqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison q relativement à 1 et le signe de son premier terme u_0 :
   - Si $q = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à 0 à partir de son deuxième terme.

Proposition 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :
   - si $r \geqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
   - si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,
   - si $r \leqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison q relativement à 1 et le signe de son premier terme u_0 :
   - Si $q = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à 0 à partir de son deuxième terme.
   - si $u_0 \geqslant 0$ et $q > 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante(strictement si $u_0 > 0$).

Proposition 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :
   - si $r \geqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
   - si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,
   - si $r \leqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison q relativement à 1 et le signe de son premier terme u_0 :
   - Si $q = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à 0 à partir de son deuxième terme.
   - si $u_0 \geqslant 0$ et $q > 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante(strictement si $u_0 > 0$).
   - Si $q = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à u_0.

Proposition 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :
   - si $r \geqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
   - si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,
   - si $r \leqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison q relativement à 1 et le signe de son premier terme u_0 :
   - Si $q = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à 0 à partir de son deuxième terme.
   - si $u_0 \geqslant 0$ et $q > 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante(strictement si $u_0 > 0$).
   - Si $q = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à u_0.
   - Si $u_0 \geqslant 0$ et $0 < q < 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (strictement si $u_0 > 0$).

Proposition 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique alors ses variations sont données par le signe de sa raison r :
   - si $r \geqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
   - si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,
   - si $r \leqslant 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique alors ses variations sont données par la position de sa raison q relativement à 1 et le signe de son premier terme u_0 :
   - Si $q = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à 0 à partir de son deuxième terme.
   - si $u_0 \geqslant 0$ et $q > 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante(strictement si $u_0 > 0$).
   - Si $q = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à u_0.
   - Si $u_0 \geqslant 0$ et $0 < q < 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (strictement si $u_0 > 0$).
   - Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Méthode 3 :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

- On exprime $u_{n+1} - u_n$, on factorise, réduit au même dénominateur, ...

Méthode 3 :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

- On exprime $u_{n+1} - u_n$, on factorise, réduit au même dénominateur, …
- À l'aide d'un tableau de signes, on montre que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Méthode 3 :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

- On exprime $u_{n+1} - u_n$, on factorise, réduit au même dénominateur, ...
- À l'aide d'un tableau de signes, on montre que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Méthode 4 :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous forme multiplicative et à termes strictement positifs est croissante :

- On exprime $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, on factorise, simplifie majore, minore, ...

Méthode 3 :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

- On exprime $u_{n+1} - u_n$, on factorise, réduit au même dénominateur, ...
- À l'aide d'un tableau de signes, on montre que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Méthode 4 :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous forme multiplicative et à termes strictement positifs est croissante :

- On exprime $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, on factorise, simplifie majore, minore, ...
- On montre le numérateur est plus grand que le dénominateur *i.e.* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

Exercice 5 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$.

Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Proposition 4 (Suites définies explicitement par une fonction) :

Soient f une fonction définie sur $[n_0\,;+\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n = f(n).$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même monotonie que la fonction. La réciproque est fausse.

Proposition 4 (Suites définies explicitement par une fonction) :

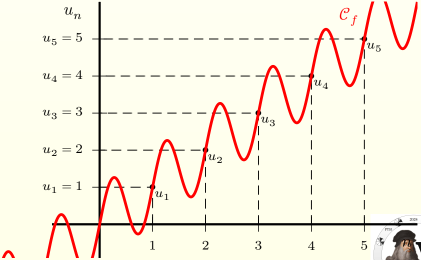
Soient f une fonction définie sur $[n_0\,;+\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n = f(n).$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même monotonie que la fonction. La réciproque est fausse.

Soit la fonction $f : x \longmapsto x + \sin(2\pi x)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$.

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + \sin(2\pi n) = n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.



Proposition 4 (Suites définies explicitement par une fonction) :

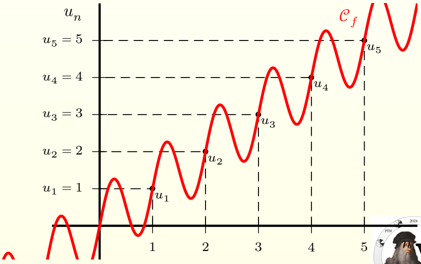
Soient f une fonction définie sur $[n_0\,;+\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n = f(n).$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même monotonie que la fonction. La réciproque est fausse.

Soit la fonction $f : x \longmapsto x + \sin(2\pi x)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$.

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = n + \sin(2\pi n) = n$.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- La fonction, représentée en rouge, n'est même pas monotone.



II. Comportement asymptotique des suites

Il est temps de s'intéresser au comportement d'une suite lorsque $n \to +\infty$ *i.e.* son comportement asymptotique..

Deux cas, opposés l'un de l'autre se présentent : les suites convergentes et les suites divergentes. Parmi ces dernières, les divergentes vers l'infini et celle n'ayant pas de limites.

Définition 8 (Limite d'une suite réelle) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si tout voisinage de ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists\, n_o(\mathrm{V}_\ell) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \in \mathrm{V}_\ell.$$

En particulier :

Définition 8 (Limite d'une suite réelle) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si tout voisinage de ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists\, n_o(\mathrm{V}_\ell) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\; n \geqslant n_o \implies u_n \in \mathrm{V}_\ell.$$

  En particulier :

  - ◇ On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\; n \geqslant n_o \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 8 (Limite d'une suite réelle) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si tout voisinage de ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists\, n_o(\mathrm{V}_\ell) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \in \mathrm{V}_\ell.$$

En particulier :

- ◇ On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- ◇ On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente vers $+\infty$ si :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, n_o(\mathrm{A}) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \geqslant \mathrm{A}.$$

Définition 8 (Limite d'une suite réelle) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si tout voisinage de ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists\, n_o(\mathrm{V}_\ell) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \in \mathrm{V}_\ell.$$

  En particulier :

  - On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

  - On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente vers $+\infty$ si :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, n_o(\mathrm{A}) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \geqslant \mathrm{A}.$$

  - On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente vers $-\infty$ si :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, n_o(\mathrm{A}) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \leqslant \mathrm{A}.$$

Définition 8 (Limite d'une suite réelle) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si tout voisinage de ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang :

$$\forall\, V_\ell \in \mathcal{V}(\ell), \exists\, n_o(V_\ell) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \in V_\ell.$$

  En particulier :
  - On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :
  $$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
  - On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente vers $+\infty$ si :
  $$\forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, n_o(A) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \geqslant A.$$
  - On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente vers $-\infty$ si :
  $$\forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, n_o(A) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \leqslant A.$$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si elle ne converge pas.

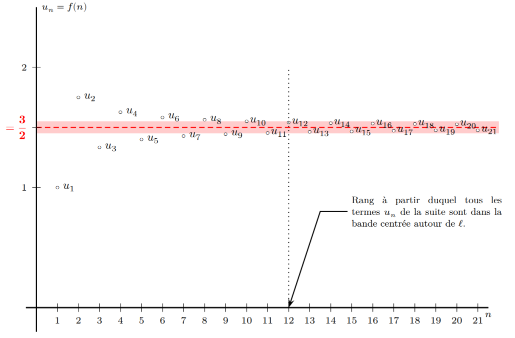


Figure 3 – La suite définie par $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{2n}$ converge vers $\ell = \dfrac{3}{2}$.

Rappel :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \iff u_n \in [\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon] \iff \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$

ATTENTION

Le contraire de convergent n'est pas divergent vers l'infini !

ATTENTION Le contraire de convergent n'est pas divergent vers l'infini !

Exemple 6 :

La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

En effet, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend que les valeurs 1 et -1 donc ne peut converger que vers une de ces valeurs.

Comme $\left[\frac{2}{3}\,;\frac{4}{3}\right]$ est un voisinage de 1 ne contenant pas $u_{2n+1} = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 1. De même avec $\left[-\frac{4}{3}\,;-\frac{2}{3}\right]$ et $u_{2n} = 1$, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers -1.

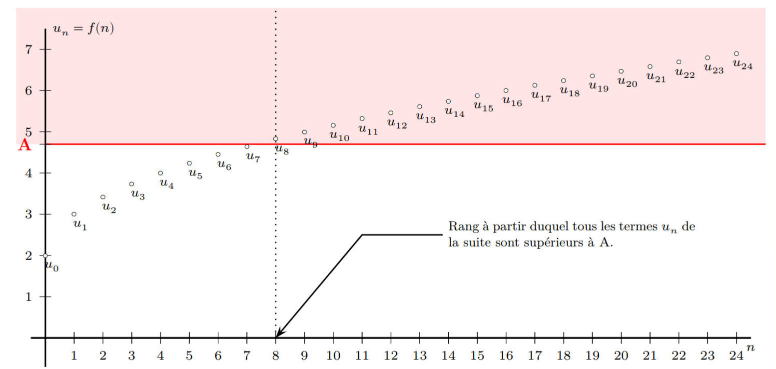


Figure 4 – La suite définie par $u_n = \sqrt{n} + 2$ diverge vers $+\infty$.

Remarques : Le comportement asymptotique d'une suite ne dépend que du comportement de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple 7 :

La suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Tout intervalle $[-a\,;a]$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$, contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir du rang $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{a} \right\rfloor + 1$.

La définition (9) se prolonge aux suites à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue par le module :

Définition 9 (Limite d'une suite complexe) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

La définition (9) se prolonge aux suites à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue par le module :

Définition 9 (Limite d'une suite complexe) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\, n \geqslant n_o \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

ATTENTION

La notion de suites complexes divergeant vers l'infini ne veut rien dire dans $\mathbb{C}$!

On déduit immédiatement de la définition (9) la proposition ci-dessous :

Proposition 5 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$

Proposition 5 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0$.

Proposition 5 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0$.
3. $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad\iff\quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\,(u_n) = \mathrm{Re}\,(\ell) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}\,(u_n) = \mathrm{Im}\,(\ell)\,. \end{cases}$$
   En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \overline{u_n} = \overline{\ell}$.

Proposition 5 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0.$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(\ell). \end{cases}$

   En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \overline{u_n} = \overline{\ell}.$

Corollaire 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|.$$

Proposition 5 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes et $\ell \in \mathbb{C}$.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0.$
3. $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\,(u_n) = \mathrm{Re}\,(\ell) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}\,(u_n) = \mathrm{Im}\,(\ell)\,. \end{cases}$$

   En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \overline{u_n} = \overline{\ell}.$

Corollaire 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|\,.$$

ATTENTION

La réciproque est fausse. Il suffit de considérer la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$.
   Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 6 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$.
   Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si elle est stationnaire.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ *i.e.* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$.
   Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors elle est constante.

Proposition 6 :

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Si, $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Proposition 6 :

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Si, $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Proposition 7 :

1. $\forall\, p \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et $(n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.

Proposition 6 :

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Si, $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Proposition 7 :

1. $\forall\, p \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et $(n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.
2. $\forall\, q \in]-1\,;1[$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exemple 8 :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall\, n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\right)^n$ converge vers 0.

Corollaire 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge (vers } \pm\infty) \text{ si, et seulement si } r \neq 0.$$

Exercice 7 :

Montrer que $[0\,;1] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[0\,;1+\frac{1}{n}\right]$.

Théorème 8 :

Si une suite converge alors sa limite est unique.

Théorème 8 :

Si une suite converge alors sa limite est unique.

On peut donc légitimement parler de LA limite d'une suite convergente.

Théorème 8 :

Si une suite converge alors sa limite est unique.

On peut donc légitimement parler de LA limite d'une suite convergente.

Par la contraposée, si une suite possède plusieurs limites alors elle diverge.

Théorème 8 :

Si une suite converge alors sa limite est unique.

On peut donc légitimement parler de LA limite d'une suite convergente.

Par la contraposée, si une suite possède plusieurs limites alors elle diverge.

Exercice 8 (Série harmonique) :

On considère la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Théorème 8 :

Si une suite converge alors sa limite est unique.

On peut donc légitimement parler de LA limite d'une suite convergente.

Par la contraposée, si une suite possède plusieurs limites alors elle diverge.

Exercice 8 (Série harmonique) :

On considère la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. Que dire de la convergence de $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 9 (Lemme de Cesàro - complément de cours) :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe et c la suite de terme général

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En utilisant la définition de la limite, montrer que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 9 (Lemme de Cesàro - complément de cours) :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe et c la suite de terme général

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En utilisant la définition de la limite, montrer que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. En déduire que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$, alors $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 9 (Lemme de Cesàro - complément de cours) :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe et c la suite de terme général

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En utilisant la définition de la limite, montrer que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. En déduire que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$, alors $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9 (Lemme de Cesàro - complément de cours) :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe et c la suite de terme général

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En utilisant la définition de la limite, montrer que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. En déduire que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$, alors $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose maintenant que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer qu'il en est de même pour c_n.

Exercice 9 (Lemme de Cesàro - complément de cours) :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe et c la suite de terme général

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En utilisant la définition de la limite, montrer que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. En déduire que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$, alors $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose maintenant que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer qu'il en est de même pour c_n.
5. Application : montrer que si une suite vérifie $a_{n+1} - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}^*$, alors $\dfrac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Proposition 9 :

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

Proposition 9 :

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

ATTENTION

La réciproque est encore fausse toujours en considérant $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Proposition 9 :

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

ATTENTION

La réciproque est encore fausse toujours en considérant $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exemple 9 :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie $\forall\, n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (1 + \mathrm{i})^n$ diverge.

Corollaire 3 :

1. Toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement positif ou divergeant vers $+\infty$ est minorée par un réel m strictement positif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \ \text{ et } \ \ell > 0 \implies \exists\, m \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \geqslant m > 0.$$

Corollaire 3 :

1. Toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement positif ou divergeant vers $+\infty$ est minorée par un réel m strictement positif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell > 0 \implies \exists\, m \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \geqslant m > 0.$$

2. Toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement négatif ou divergeant vers $-\infty$ est majorée par un réel M strictement négatif à partir d'un certain rang.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell < 0 \implies \exists\, \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant \mathrm{M} < 0.$$

Théorème 10 (Limites et inégalités strictes) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel ℓ et et m, $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \mathrm{M}$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $u_n < \mathrm{M}$.

Théorème 10 (Limites et inégalités strictes) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel ℓ et et m, $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \mathrm{M}$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $u_n < \mathrm{M}$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > m$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $u_n > m$.

Théorème 10 (Limites et inégalités strictes) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel ℓ et et m, $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \mathrm{M}$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $u_n < \mathrm{M}$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > m$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $u_n > m$.

Théorème 11 (Limites et inégalités larges) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles possédant une limite finie.

$$\text{Si } \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant v_n \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Théorème 10 (Limites et inégalités strictes) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel ℓ et et m, $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \mathrm{M}$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n < \mathrm{M}$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > m$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n > m$.

Théorème 11 (Limites et inégalités larges) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles possédant une limite finie.

$$\text{Si } \forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant v_n \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Remarque : Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux suites est constante.

Exemple 10 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente avec $u_n \leqslant \mathrm{A}$ à partir d'un certain rang.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \mathrm{A}$.

Exemple 10 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente avec $u_n \leqslant \mathrm{A}$ à partir d'un certain rang.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \mathrm{A}$.

ATTENTION

C'est **TRÈS** faux avec des inégalités STRICTES ! Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Une suite, n'étant qu'une fonction particulière, on peut traduire les théorèmes sur les limites de composée :

Théorème 12 (Composition à gauche par une fonction) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \bar{\mathrm{I}}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une application et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I.

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Théorème 12 (Composition à gauche par une fonction) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \bar{\mathrm{I}}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une application et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I.

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Exemples 11 (Importants) :

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Théorème 12 (Composition à gauche par une fonction) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \bar{\mathrm{I}}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une application et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I.

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Exemples 11 (Importants) :

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si f est continue en a et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

Théorème 12 (Composition à gauche par une fonction) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \bar{\mathrm{I}}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une application et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I.

$$\text{Si } \begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Exemples 11 (Importants) :

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Si f est continue en a et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x$.

En appliquant le théorème précédent aux fonctions de référence, on retrouve facilement les limites de quelques suites intuitives :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

En appliquant le théorème précédent aux fonctions de référence, on retrouve facilement les limites de quelques suites intuitives :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty.$

En appliquant le théorème précédent aux fonctions de référence, on retrouve facilement les limites de quelques suites intuitives :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty.$
- ...

Exemples 12 :

- $\arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.

Exemples 12 :

- $\arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0$ alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ indépendant de n.

Exemples 12 :

- $\arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0$ alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ indépendant de n.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exemples 12 :

- $\arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0$ alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ indépendant de n.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- $n^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

ATTENTION

Les derniers exemples montrent que 1^∞ est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \not\Longrightarrow u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exemples 12 :

- $\arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0$ alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ indépendant de n.
- $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- $n^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

ATTENTION

Les derniers exemples montrent que 1^∞ est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \not\Longrightarrow u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

De même ∞^0 est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \not\Longrightarrow u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Exemples 12 :

- $\arctan(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0$ alors $u_n^{\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^{\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ indépendant de n.
- $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- $n^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

ATTENTION

Les derniers exemples montrent que 1^{∞} est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \cancel{\Longrightarrow} u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

De même ∞^0 est une forme indéterminée :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \cancel{\Longrightarrow} u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

En tout état de cause, il faudrait en rajouter d'autres : 0^0, 0^{∞} et ∞^{∞} que nous traiterons au cas par cas en nous ramenant aux précédentes.

En composant avec les limites usuelles de fonctions et en remarquant que $t^n = \mathrm{e}^{n \ln t}$ pour $t > 0$, on retrouve encore les limites usuelles.

Corollaire 4 (Limites usuelles et croissances comparées) :

Puissances de n : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
$\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha$	0	1	$+\infty$

En composant avec les limites usuelles de fonctions et en remarquant que $t^n = \mathrm{e}^{n \ln t}$ pour $t > 0$, on retrouve encore les limites usuelles.

Corollaire 4 (Limites usuelles et croissances comparées) :

Puissances de n : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
$\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha$	0	1	$+\infty$

Croissances comparées : Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, $q > 1$ et $x \in]-1\,;1[$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha x^n = 0$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - ◇ $a + (+\infty) = +\infty$
  - ◇ $a + (-\infty) = -\infty$
  - ◇ $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - ◇ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
  - $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
  - $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- On ajoute deux symboles 0^+ et 0^- vérifiant pour $a \neq 0$:

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
  - $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- On ajoute deux symboles 0^+ et 0^- vérifiant pour $a \neq 0$:
  - $a \times 0^+ = 0^{\text{signe } (a)}$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
  - $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- On ajoute deux symboles 0^+ et 0^- vérifiant pour $a \neq 0$:
  - $a \times 0^+ = 0^{\text{signe }(a)}$
  - $a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
  - $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- On ajoute deux symboles 0^+ et 0^- vérifiant pour $a \neq 0$:
  - $a \times 0^+ = 0^{\text{signe }(a)}$
  - $a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$
  - $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
  - $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- On ajoute deux symboles 0^+ et 0^- vérifiant pour $a \neq 0$:
  - $a \times 0^+ = 0^{\text{signe } (a)}$
  - $a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$
  - $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$
  - $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
  - $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- On ajoute deux symboles 0^+ et 0^- vérifiant pour $a \neq 0$:
  - $a \times 0^+ = 0^{\text{signe }(a)}$
  - $a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$
  - $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$
  - $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$
  - $\dfrac{1}{+\infty} = 0^+$

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
  - $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- On ajoute deux symboles 0^+ et 0^- vérifiant pour $a \neq 0$:
  - $a \times 0^+ = 0^{\text{signe }(a)}$
  - $a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$
  - $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$
  - $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$
  - $\dfrac{1}{+\infty} = 0^+$
  - $\dfrac{1}{-\infty} = 0^-$.

Définition 10 (Règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$) :

On convient des règles de calculs (lacunaires) suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- Pour $a \in \mathbb{R}$:
  - $a + (+\infty) = +\infty$
  - $a + (-\infty) = -\infty$
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- Pour $a \neq 0$:
  - $a \times (+\infty) = \text{signe}(a)\infty$
  - $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
  - $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
  - $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- On ajoute deux symboles 0^+ et 0^- vérifiant pour $a \neq 0$:
  - $a \times 0^+ = 0^{\text{signe }(a)}$
  - $a \times 0^- = 0^{-\text{signe}(a)}$
  - $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$
  - $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$
  - $\dfrac{1}{+\infty} = 0^+$
  - $\dfrac{1}{-\infty} = 0^-$.

Les quotients $\dfrac{a}{b}$ s'obtiennent comme $a \times \dfrac{1}{b}$ si l'opération est définie.

ATTENTION

Les opérations $(+\infty)+(-\infty)$, $0\times(+\infty)$, $0\times(-\infty)$, $\dfrac{0^\pm}{0^\pm}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(0^\pm)^{\pm\infty}$ et $(\pm\infty)^{0^\pm}$ ne sont pas définies et appelées « formes indéterminées », c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles qu'ils faudra... déterminer.

Proposition 13 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant des limites ℓ et ℓ'.

Somme : Si $\ell + \ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Proposition 13 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant des limites ℓ et ℓ'.

Somme : Si $\ell + \ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Multiple : Si $\lambda.\ell$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\lambda.u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda.\ell$.

Proposition 13 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant des limites ℓ et ℓ'.

Somme : Si $\ell+\ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}\cup\{0^+,0^-\}$, alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell+\ell'$.

Multiple : Si $\lambda.\ell$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}\cup\{0^+,0^-\}$, alors $\lambda.u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda.\ell$.

Produit : Si $\ell\times\ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}\cup\{0^+,0^-\}$, alors $u_n\times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\times\ell'$.

Proposition 13 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant des limites ℓ et ℓ'.

Somme : Si $\ell+\ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}\cup\{0^+,0^-\}$, alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell+\ell'$.

Multiple : Si $\lambda.\ell$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}\cup\{0^+,0^-\}$, alors $\lambda.u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda.\ell$.

Produit : Si $\ell\times\ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}\cup\{0^+,0^-\}$, alors $u_n\times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\times\ell'$.

Inverse : Si $\dfrac{1}{\ell}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}\cup\{0^+,0^-\}$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$.

Proposition 13 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant des limites ℓ et ℓ'.

Somme : Si $\ell+\ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}\cup\{0^+,0^-\}$, alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell+\ell'$.

Multiple : Si $\lambda.\ell$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}\cup\{0^+,0^-\}$, alors $\lambda.u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda.\ell$.

Produit : Si $\ell\times\ell'$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}\cup\{0^+,0^-\}$, alors $u_n\times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\times\ell'$.

Inverse : Si $\dfrac{1}{\ell}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}\cup\{0^+,0^-\}$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$.

Quotient : Si $\dfrac{\ell}{\ell'}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}}\cup\{0^+,0^-\}$, alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Remarque : En particulier, l'ensemble des suites convergentes contient la suite nulle et est stable par combinaisons linéaires. On dit que c'est un espace vectoriel.

Dans la même idée, l'opérateur $\lim\limits_{n\to+\infty}$ est un opérateur linéaire sur l'ensemble des suites convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque : En particulier, l'ensemble des suites convergentes contient la suite nulle et est stable par combinaisons linéaires. On dit que c'est un espace vectoriel.

Dans la même idée, l'opérateur $\lim\limits_{n \to +\infty}$ est un opérateur linéaire sur l'ensemble des suites convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

ATTENTION

L'ensemble des suites divergentes N'EST PAS stable par combinaisons linéaires.

Remarque : En particulier, l'ensemble des suites convergentes contient la suite nulle et est stable par combinaisons linéaires. On dit que c'est un espace vectoriel.

Dans la même idée, l'opérateur $\lim\limits_{n\to+\infty}$ est un opérateur linéaire sur l'ensemble des suites convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

ATTENTION

L'ensemble des suites divergentes N'EST PAS stable par combinaisons linéaires.

Exemples 13 :

- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow \left|\dfrac{1}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Exemple 14 (Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$) :

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n + \ell) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n \to +\infty} ((n + \ell) - n) = \ell$.

Exemple 14 (Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$) :

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+\ell) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} ((n+\ell) - n) = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n - n) = +\infty$.

Exemple 14 (Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$) :

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\ell) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}((n+\ell)-n) = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-n) = +\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} n + (-1)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+(-1)^n - n)$ n'a pas de limite.

Exemple 14 (Cas de la forme indéterminée $(+\infty)-(+\infty)$) :

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\ell)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}((n+\ell)-n)=\ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-n)=+\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} n+(-1)^n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+(-1)^n-n)$ n'a pas de limite.

ATTENTION

$(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut avoir une limite sans que ce ne soit le cas pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 15 (Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$) :

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ell}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ell}{n} \times n = \ell$.

Exemple 15 (Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$) :

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ell}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ell}{n} \times n = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \times n^2 = +\infty$.

Exemple 15 (Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$) :

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ell}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ell}{n} \times n = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \times n^2 = +\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \times n$ n'a pas de limite.

Exemple 15 (Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$) :

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ell}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ell}{n} \times n = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \times n^2 = +\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \times n$ n'a pas de limite.

ATTENTION

$(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ peuvent avoir des limites sans que ce ne soit le cas pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 :

Soit $u_n = \dfrac{\ln(n) + n^2 + 2}{\mathrm{e}^n + \sqrt{n}}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Définition II (Suite extraite) :

Une sous-suite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appelée aussi suite extraite, est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ est une application **strictement** croissante.

Définition 11 (Suite extraite) :

Une sous-suite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appelée aussi suite extraite, est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ est une application **strictement** croissante.

Les sous-suites que nous manipulerons le plus souvent sont les sous-suites de la forme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, on ne garde que les termes d'indice pair de la suite, et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, on garde les termes d'indice impair, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, ...

Définition II (Suite extraite) :

Une sous-suite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appelée aussi suite extraite, est une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ est une application **strictement** croissante.

Les sous-suites que nous manipulerons le plus souvent sont les sous-suites de la forme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, on ne garde que les termes d'indice pair de la suite, et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, on garde les termes d'indice impair, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, ...

Lemme I :

Soit φ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n.$$

Théorème 14 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers une limite ℓ.

Alors toute sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette même limite ℓ.

Théorème 14 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers une limite ℓ.

Alors toute sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette même limite ℓ.

En pratique, ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite N'A PAS DE LIMITE. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite comme à l' exercice (11) .

Théorème 14 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers une limite ℓ.

Alors toute sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette même limite ℓ.

En pratique, ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite N'A PAS DE LIMITE. Il suffit pour cela d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite comme à l' exercice (11) .

ATTENTION

La convergence d'une ou plusieurs suites extraites n'est en général pas suffisante pour assurer la convergence d'une suite.

Il faut que l'ensemble des suites extraites considérées permette de contrôler de façon complète tous les termes de la suite (au moins à partir d'un certain rang).

Exemple 16 :

Si $x \in]-1\,;1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2^n} = 0$.

On remarquera bien que la suite $\left(x^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, x^{2^n} et $(x^2)^n = x^{2n}$ n'ont rien en commun.

La suite $\left(x^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est tout simplement une suite extraite de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

Exemple 16 :

Si $x \in]-1\,;1[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{2^n} = 0$.

On remarquera bien que la suite $\left(x^{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, x^{2^n} et $(x^2)^n = x^{2n}$ n'ont rien en commun.

La suite $\left(x^{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est tout simplement une suite extraite de $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

Exercice 11 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{n}{9} - \left\lfloor \dfrac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$.

1. Étudier les limites des suites extraites $(u_{9n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{(3n+1)^2})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 16 :

Si $x \in]-1\,;1[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{2^n} = 0$.

On remarquera bien que la suite $\left(x^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, x^{2^n} et $(x^2)^n = x^{2n}$ n'ont rien en commun.

La suite $\left(x^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est tout simplement une suite extraite de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

Exercice 11 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{n}{9} - \left\lfloor \dfrac{\sqrt{n}}{3} \right\rfloor^2$.

1. Étudier les limites des suites extraites $(u_{9n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{(3n+1)^2})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Théorème 15 :

Si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Théorème 15 :

Si les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Remarque : On peut facilement prolonger ce résultat à toute famille de suites extraites dont les indices forment une partition de $\mathbb{N}$.

Théorème 16 (de comparaison et d'encadrement) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

Théorème d'encadrement :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = \ell$ et si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $m_n \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Théorème 16 (de comparaison et d'encadrement) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

Théorème d'encadrement :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = \ell$ et si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $m_n \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Théorème de minoration : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ et si $\forall\, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, $m_n \leqslant u_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème 16 (de comparaison et d'encadrement) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell\in\mathbb{R}$.

Théorème d'encadrement :
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = \ell$ et si $\forall\, n\in\mathbb{N}_{n_0},\ m_n \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}_n$,
alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Théorème de minoration : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ et si $\forall\, n\in\mathbb{N}_{n_0},\ m_n \leqslant u_n$,
alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème de majoration : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n = -\infty$ et si $\forall\, n\in\mathbb{N}_{n_0},\ u_n \leqslant \mathrm{M}_n$,
alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

ATTENTION

Ne prenez pas le théorème d'encadrement pour un simple passage à la limite dans des inégalités larges.

Quand on passe à la limite dans une inégalité, on sait déjà que son membre de gauche et son membre de droite ont une limite.

Or, dans le théorème d'encadrement au contraire, seules les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n$ sont réputées exister au départ et l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en découle.

Exercice 12 (Série harmonique) :

On considère la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2}$.

Exercice 12 (Série harmonique) :

On considère la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2}$.
2. Que dire de la convergence de $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Proposition 17 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit $q \in \mathbb{R}$.

	$q > 1$	$q = 1$	$-1 < q < 1$	$q \leqslant -1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	n'existe pas

Proposition 17 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit $q \in \mathbb{R}$.

	$q > 1$	$q = 1$	$-1 < q < 1$	$q \leqslant -1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	n'existe pas

Exemple 17 (Le grand classique) :

Si $x \in]-1\,;1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$.

$$\text{D'où, } \lim_{n \to +\infty} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Corollaire 5 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Corollaire 5 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- Si $|q| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q > 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } u_0 > 0, \\ -\infty \text{ si } u_0 < 0. \end{cases}$

Corollaire 5 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } u_0 > 0, \\ -\infty \text{ si } u_0 < 0. \end{cases}$
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.

Corollaire 5 (Limite d'une suite géométrique) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } u_0 > 0, \\ -\infty \text{ si } u_0 < 0. \end{cases}$
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
- Si $q \leqslant -1$ et $u_0 \neq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Le théorème (16) d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 6 (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

$$\text{Si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée et si } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0.$$

Le théorème (16) d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 6 (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

$$\text{Si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée et si } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0.$$

Exercice 13 :

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs.

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers ℓ.

1. Montrer que si $0 < \ell < 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Le théorème (16) d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 6 (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

$$\text{Si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée et si } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0.$$

Exercice 13 :

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs.

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers ℓ.

1. Montrer que si $0 < \ell < 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $\ell > 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Le théorème (16) d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 6 (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0$.

Exercice 13 :

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs.

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers ℓ.

1. Montrer que si $0 < \ell < 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $\ell > 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Déterminer deux suites de nature différente dans le cas où $\ell = 1$.

Le théorème (16) d'encadrement est souvent utilisé sous la forme suivante :

Corollaire 6 (Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle) :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n u_n = 0$.

Exercice 13 :

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs.

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers ℓ.

1. Montrer que si $0 < \ell < 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $\ell > 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Déterminer deux suites de nature différente dans le cas où $\ell = 1$.
4. Déterminer la nature des suites $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $a > 0$) et de $\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les résultats de l' exercice (13) sont à retenir :

Corollaire 7 (Comparaison exponentielle/factorielle) :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

Plus précisément,

1. Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).

Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

Plus précisément,

1. Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
2. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

1. Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
2. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

1. Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
2. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

Autrement dit, toute suite monotone est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

1. Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
2. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

Autrement dit, toute suite monotone est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si une suite monotone est bornée elle convergera, sinon elle divergera vers $\pm\infty$.
Ce théorème donne toute sa force et leur importance aux suites monotones.

Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

1. Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
2. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

Autrement dit, toute suite monotone est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si une suite monotone est bornée elle convergera, sinon elle divergera vers $\pm\infty$.
Ce théorème donne toute sa force et leur importance aux suites monotones.

Ce théorème est un théorème d'existence, il justifie l'existence d'une limite finie mais ne précise pas cette limite mais seulement que c'est sa borne supérieure.

Théorème 18 (Limite monotone) :

Toute suite monotone réelle admet une limite.

1. Toute suite croissante majorée converge (vers sa borne supérieure).
2. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

L'énoncé est similaire pour les suites décroissantes.

ATTENTION

Ce théorème permet de montrer qu'une suite converge vers une limite ℓ mais ne donne pas la valeur de cette limite. On peut seulement dire que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par M alors $\ell \leqslant \mathrm{M}$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par m alors $\ell \geqslant m$.

La suite a une infinité de majorants ou de minorants suivant les cas mais un seul est sa limite.

La question et la difficulté sont de la trouver.

Exemple 18 :

La suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ est croissante et majorée par 1 donc convergente.

Mais ces arguments ne prouvent en aucun cas que sa limite est 1.

Le calcul de la limite est d'ailleurs loin d'être simple.

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fausse : si une suite diverge vers $+\infty$, elle n'est pas nécessairement croissante.

Il suffit de considérer la suite définie par $u_n = n + (-1)^n$ pour s'en convaincre.

III. Théorèmes d'existence de limites

2. Théorème de la limite monotone

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fausse : si une suite diverge vers $+\infty$, elle n'est pas nécessairement croissante.

Il suffit de considérer la suite définie par $u_n = n + (-1)^n$ pour s'en convaincre.

De même, toute suite croissante majorée, donc convergente, sera un contre-exemple à une suite croissante qui ne diverge pas nécessairement vers $+\infty$ si on enlève la condition « non majorée ».

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fausse : si une suite diverge vers $+\infty$, elle n'est pas nécessairement croissante.

Il suffit de considérer la suite définie par $u_n = n + (-1)^n$ pour s'en convaincre.

De même, toute suite croissante majorée, donc convergente, sera un contre-exemple à une suite croissante qui ne diverge pas nécessairement vers $+\infty$ si on enlève la condition « non majorée ».

Enfin, il n'est pas nécessaire d'être monotone pour converger comme la suite définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n > 0$.

À retenir :

Toutes les suites ne sont pas monotones.

À retenir :

Toutes les suites ne sont pas monotones.

Dans ce cas, on tentera d'utiliser le théorème (16) de comparaison et d'encadrement qui reste un outils extrêmement puissant, l'inégalité des accroissements finis à venir ou les questions de l'énoncé...

Exercice 14 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\left\lfloor 2^k\sqrt{2} \right\rfloor}{3^k}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

IV. Suites adjacentes

Définition 12 (Suites adjacentes) :

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

IV. Suites adjacentes

Définition 12 (Suites adjacentes) :

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

IV. Suites adjacentes

Définition 12 (Suites adjacentes) :

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

IV. Suites adjacentes

Définition 12 (Suites adjacentes) :

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Deux telles suites ne peuvent avoir un comportement quelconque.

Définition 12 (Suites adjacentes) :

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Deux telles suites ne peuvent avoir un comportement quelconque.

Lemme 2 :

Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ remplissant les conditions de la définition (12) .

Alors,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

Théorème 19 :

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent une même limite. [1]

[1]. Pas de soirée « no limit » pour nos suites adjacentes !

Théorème 19 :

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent une même limite. [1]

Remarque : En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$: u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ, respectivement par défaut et par excès à $v_n - u_n$ près.

---

[1]. Pas de soirée « no limit » pour nos suites adjacentes !

Théorème 19 :

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent une même limite. [1]

Remarque : En particulier, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$: u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ, respectivement par défaut et par excès à $v_n - u_n$ près.

Le théorème (19) a de nombreuses applications. La proposition (20) en est une.

[1]. Pas de soirée « no limit » pour nos suites adjacentes !

Exercice 15 :

1. Montrer que les suites $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes.

Exercice 15 :

1. Montrer que les suites $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes.
2. En déduire que $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

Proposition 20 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Les deux suites définies par $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune x.

Proposition 20 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Les deux suites définies par $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune x.

Le décimal a_n est appelé approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près, et le décimal b_n approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près.

Proposition 20 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Les deux suites définies par $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$, et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune x.

Le décimal a_n est appelé approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près, et le décimal b_n approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près.

Exemple 19 :

Si $x = \pi$, on obtiendra $a_3 = 3,141$ et $b_3 = 3,142$.