Équations différentielles linéaires

1. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions de $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{x+1}$.

   Pour ne pas faire de bêtises, le mieux est de factoriser et de résoudre, pour $x \neq 0, -1$:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leqslant 0 \iff \frac{1}{x(x+1)} \leqslant 0.$$

$$\mathcal{S} = \left]-1\,;0\right[.$$

2. Donner les solutions générales de l'équation différentielle $y' + 2y = 3\cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   — Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$y_{\mathrm{H}} : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-2x},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

   — Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} y_p(x) &= \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \\ y_p'(x) &= \mu\cos(x) - \lambda\sin(x) \end{aligned}$$

   y_p est solution particulière si, et seulement si

$$y_p' + 2y_p = 3\cos(x) - \sin(x)$$

$$(\mu + 2\lambda)\cos(x) + (-\lambda + 2\mu)\sin(x) = 3\cos(x) - \sin(x) \iff \begin{cases} \mu + 2\lambda = 3 \\ 2\mu - \lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

   Une solution particulière est $y_p : x \longmapsto \cos(x) + \sin(x)$.

   — Les solutions générales sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme :

$$y : x \longmapsto \cos(x) + \sin(x) + \lambda\,\mathrm{e}^{-2x},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Déterminer les solutions réelles de l'équation $y'' + 2y' + 4y = 0$.

   $(\mathrm{E}_c) : r^2 + 2r + 4 = 0$ a deux solutions $-1 \pm i\sqrt{3}$.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\left[k_1\cos\left(x\sqrt{3}\right) + k_2\sin\left(x\sqrt{3}\right)\right],\ (k_1\,;k_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

4. Déterminer les solutions complexes de l'équation $y'' - (2+i)y' + (1+i)y = 0$.

   $(\mathrm{E}_c) : r^2 - (2+i)r + (1+i) = 0$ a deux solutions $1+i$ et 1.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{x \longmapsto \mathrm{K}_1\,\mathrm{e}^{(1+i)x} + \mathrm{K}_2\,\mathrm{e}^{x},\ (\mathrm{K}_1\,;\mathrm{K}_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

Équations différentielles linéaires

1. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions de $\dfrac{x}{x+1} \geqslant \dfrac{x+2}{x+3}$.

   Pour $x \neq -1, -3$, $\dfrac{x}{x+1} \geqslant \dfrac{x+2}{x+3} \iff \dfrac{-2}{(x+1)(x+3)} \geqslant 0$.

$$\mathcal{S} = \left]-3\,;-1\right[.$$

2. Donner les solutions générales de l'équation différentielle $(x-1)y' - xy = 2 + x + 2x^2$ sur $]1\,;+\infty[$.

   — Comme $x - 1 \neq 0$ sur $]1\,;+\infty[$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ est continue sur $]1\,;+\infty[$ et les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$y_{\mathrm{H}} : x \longmapsto \lambda(x-1)\,\mathrm{e}^{x},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

   — Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax + b$:

$$\forall\, x \in \left]1\,;+\infty\right[,\quad y_p(x) = ax + b$$
$$y_p'(x) = a$$

   y_p est solution particulière si, et seulement si

$$(x-1)y_p' - xy_p = 2 + x + 2x^2$$
$$(x-1)a - x(ax+b) = 2 + x + 2x^2$$
$$-ax^2 + (a-b)x - a = 2 + x + 2x^2 \iff \begin{cases} -a = 2 \\ a - b = 1 \\ -a = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$$

   Une solution particulière est $y_p : x \longmapsto -2x - 3$.

   — Les solutions générales sur $]1\,;+\infty[$ sont donc de la forme :

$$y : x \longmapsto -2x - 3 + \lambda(x-1)\,\mathrm{e}^{x},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Déterminer les solutions réelles de l'équation $y'' + 14y' + 49y = 0$.

   $(\mathrm{E}_c) : r^2 + 14r + 49 = 0$ a une solution double : -7.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \longmapsto (k_1 x + k_2)\,\mathrm{e}^{-7x},\ (k_1\,;k_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

4. Déterminer les solutions complexes de l'équation $y'' - 2(1+\mathrm{i})y' + 2\,\mathrm{i}\,y = 0$.

   $(\mathrm{E}_c) : r^2 - 2(1+\mathrm{i})r + 2\,\mathrm{i} = 0$ a une racine double $1 + \mathrm{i}$.

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{x \longmapsto (\mathrm{K}_1 x + \mathrm{K}_2)\,\mathrm{e}^{(1+i)x},\ (\mathrm{K}_1\,;\mathrm{K}_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$