

XIV

Suites de référence

Dans tout ce document, \mathbb{K} désignera le corps des scalaires \mathbb{R} et \mathbb{C} .

I/ Suite arithmétique _____

Définition 1 : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* lorsqu'il existe un scalaire r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre réel r est appelé la *raison* de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemples 1 :

- La suite des entiers naturels : $u_0 = 0, u_1 = 1, \dots, u_n = n, \dots$
- La suite des multiples de 3 : $u_0 = 0, u_1 = 3, \dots, u_n = 3n, \dots$

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison ($m < n$)	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = u_n + r$	$r = \frac{u_n - u_m}{n - m}$	$u_n = u_m + (n - m)r$	$(n - m + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$

Preuve : Histoire de réviser le raisonnement par récurrence, montrons le dernier résultat.

On suppose $m \in \mathbb{N}$ fixé et on montre que la propriété $\mathcal{P}_n : u_m + \dots + u_n = (n - m + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ plus grand que m .

1. Pour $n = m$, on a bien $(\cancel{m} - \cancel{m} + 1) \times \frac{u_m + u_m}{2} = 1 \times \frac{\cancel{m} u_m}{\cancel{m}} = u_m$ donc \mathcal{P}_m est vérifiée.
2. Supposons qu'il existe un entier $k > m$, tel que \mathcal{P}_k soit vérifiée i.e.

$$u_m + \dots + u_k = (k - m + 1) \times \frac{u_m + u_k}{2}.$$

Montrons que \mathcal{P}_{k+1} est vérifiée sous cette hypothèse *i.e.*

$$u_m + \dots + u_k + u_{k+1} = (k + 1 - m + 1) \times \frac{u_m + u_{k+1}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } u_m + \dots + u_k + u_{k+1} &= (k - m + 1) \times \frac{u_m + u_k}{2} + u_{k+1} \\ &= \frac{(k - m + 1)(u_m + u_k) + 2u_{k+1}}{2} \\ &= \frac{(k - m + 1)(u_m + u_k) + u_{k+1} + u_m + (k + 1 - m)r}{2} \\ &= \frac{(k - m + 1)(u_m + u_k + r) + u_{k+1} + u_m}{2} \\ &= \frac{(k - m + 1)(u_m + u_{k+1}) + u_{k+1} + u_m}{2} \\ &= \frac{(k - m + 2)(u_m + u_{k+1})}{2}. \end{aligned}$$

La relation \mathcal{P}_{k+1} est donc vérifiée et la propriété est héréditaire.

3. La propriété \mathcal{P} est donc initialisée au rang m et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, plus grand que m .

Méthode 1 (Montrer qu'une suite est arithmétique) :

Une suite est arithmétique si, et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$ donc, pour montrer :

- qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r , on exprime, pour n quelconque, $u_{n+1} - u_n$ indépendamment de n .
- qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique, on trouve deux entiers m et n tels que $u_{m+1} - u_m \neq u_{n+1} - u_n$.

II/ Suite géométrique

Définition 2 : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *géométrique* lorsqu'il existe un scalaire q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q.$$

Le nombre réel q est appelé la *raison* de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Relation fondamentale	Définition par récurrence	Raison ($m < n$)	Définition explicite	Somme de termes $u_m + \dots + u_n$
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$	$u_{n+1} = u_n \times q$	$q = \sqrt[n-m]{\frac{u_n}{u_m}}$	$u_n = u_m \times q^{n-m}$	$u_m(n - m + 1)$ si $q = 1$. $u_m \times \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}$ si $q \neq 1$

Preuve : De même pour une suite géométrique de raison q , le raisonnement est identique en plus facile.

On pose :

$$\mathcal{P}_n : u_m + \dots + u_n = u_m \times \frac{1 - q^{n+1-m}}{1 - q}$$

pour $q \neq 1$, le cas $q = 1$ étant trivial.

1. Pour $n = m$, on a : $u_m \times \frac{1 - q^{1+1-m}}{1 - q} = u_m \frac{1 - q}{1 - q} = u_m$. La propriété est initialisée.

2. Supposons qu'il existe un entier $k > m$ tel que \mathcal{P}_k soit vérifiée. On a alors :

$$\begin{aligned} u_m + \dots + u_k + u_{k+1} &= u_m \times \frac{1 - q^{k+1-m}}{1 - q} + u_{k+1} \\ &= u_m \times \frac{1 - q^{k+1-m}}{1 - q} + u_{k+1} + q^{k+1-m} u_m \\ &= u_m \times \frac{1 - q^{k+1-m} + (1 - q)q^{k+1-m}}{1 - q} \\ &= u_m \times \frac{1 - q^{k+1-m} + q^{k+1-m} - q^{k+1-m+1}}{1 - q} \\ &= u_m \times \frac{1 - q^{k+2-m}}{1 - q}. \end{aligned}$$

La relation \mathcal{P}_{k+1} est donc vraie sous l'hypothèse \mathcal{P}_k . La propriété est héréditaire.

3. Initialisée au rang m et héréditaire, la relation \mathcal{P} est donc vraie pour tout $n \geq m$.

Méthode 2 (Montrer qu'une suite est géométrique) :

Une suite est géométrique si, et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ donc, pour montrer :

- qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q , on montre que u_n n'est jamais nul et on exprime, pour n quelconque, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ indépendamment de n .
- qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas géométrique, on montre que u_n s'annule pour un certain n ou on trouve deux entiers m et n tels que $\frac{u_{m+1}}{u_m} \neq \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3^{n+1}}{2^{2n}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique et préciser le premier terme et la raison.
2. Calculer, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n+2} u_k$.

III/ Suite arithmético-géométrique

Définition 3 (Suite arithmético-géométrique) : Pour tout couple de scalaires $(a; b)$ avec $a \neq 1$, on appelle suite *arithmético-géométrique* toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Si $a = 1$, on retrouve une suite arithmétique et si $b = 0$, une suite géométrique.

Théorème 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - c) + c$ avec $c = \frac{b}{1 - a}$.

Le réel c , solution de l'équation $x = ax + b$, est appelé *point fixe* de la suite.

Preuve :

- On commence par résoudre l'équation $x = ax + b$ dont l'unique solution est

$$c = \frac{b}{1 - a}.$$

Remarque : c est appelé « point invariant » ou « point fixe » de la fonction f associée à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $x \mapsto ax + b$. On verra plus tard que c est l'unique candidat à la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- On introduit alors la suite auxiliaire $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = u_n - c.$$

- La $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .

En effet, des deux équations :

$$\begin{array}{r} u_{n+1} = au_n + b \\ c = ac + b \\ \hline u_{n+1} - c = a(u_n - c) \end{array}$$

on obtient, par soustraction $v_{n+1} = av_n$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - c$.

- On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = a^n v_0 = a^n(u_0 - c).$$

3. On revient enfin à la suite initiale : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + c.$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n(u_0 - c) + c$ avec $c = \frac{b}{1-a}.$

Remarque : La démonstration montre que la suite définie par $v_n = u_n - c$ est une suite géométrique de raison $a.$

Méthode 3 (Plan d'étude d'une suite arithmético-géométrique) :

En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

1. Recherche du point fixe c solution de l'équation $ax + b = x.$
2. Vérification que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - c$ est une suite géométrique.
3. Conclusion : expression du terme général $u_n.$

Exercice 2 : On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

1. Déterminer le réel a pour que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + a$ pour tout entier naturel n soit géométrique.
2. Exprimer alors v_n puis u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}.$
3. Calculer les sommes $v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$ puis $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}.$

IV/ Suite homographique _____

Définition 4 (Suite homographique) : On appelle suite *homographique* toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \text{ avec } ad - bc \neq 0.$$

Remarque : Si $ad - bc = 0,$ alors, de même que la fonction homographique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante.

On commence ici aussi par chercher les *points fixes* de la fonction associée *i.e.* les solutions de l'équation :

$$x = \frac{ax + b}{cx + d} \Leftrightarrow cx^2 - (a - d)x - b = 0. \quad (\text{Hom})$$

Proposition 2 :

1. Si (Hom) admet deux racines distinctes α et β alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est géométrique de raison $q = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d}$.
2. Si (Hom) admet une racine double γ alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{u_n - \gamma}$ est arithmétique de raison $r = \frac{2c}{a + d}$.

Preuve : Posons $h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$.

1. Supposons que (Hom) admette deux racines distinctes α et β .

— Montrons tout d'abord que $\frac{h(x) - \alpha}{h(x) - \beta} = q \frac{x - \alpha}{x - \beta}$ où $q = \frac{c\beta + d}{c\alpha + d}$ en utilisant que $h(\alpha) = \alpha$ et $h(\beta) = \beta$.

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - \alpha}{h(x) - \beta} &= \frac{h(x) - h(\alpha)}{h(x) - h(\beta)} = \frac{\frac{ax + b}{cx + d} - \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}}{\frac{ax + b}{cx + d} - \frac{a\beta + b}{c\beta + d}} = \frac{\frac{(ax + b)(c\alpha + d) - (a\alpha + b)(cx + d)}{(cx + d)(c\alpha + d)}}{\frac{(ax + b)(c\beta + d) - (a\beta + b)(cx + d)}{(cx + d)(c\beta + d)}} \\ &= \frac{axc\alpha + adx + bc\alpha + bd - axc\alpha - ad\alpha - bcx - bd}{(cx + d)(c\alpha + d)} \\ &= \frac{axc\beta + adx + bc\beta + bd - axc\beta - ad\beta - bcx - bd}{(cx + d)(c\beta + d)} \\ &= \frac{ad(x - \alpha) - bc(x - \alpha)}{(cx + d)(c\alpha + d)} = \frac{(x - \alpha)(ad - bc)}{(cx + d)(c\alpha + d)} \\ &= \frac{ad(x - \beta) - bc(x - \beta)}{(cx + d)(c\beta + d)} = \frac{(x - \beta)(ad - bc)}{(cx + d)(c\beta + d)} \\ &= \frac{(x - \alpha)(ad - bc)}{(cx + d)(c\alpha + d)} \times \frac{(cx + d)(c\beta + d)}{(x - \beta)(ad - bc)} \\ &= \frac{x - \alpha}{x - \beta} \times \frac{c\beta + d}{c\alpha + d} = q \times \frac{x - \alpha}{x - \beta} \end{aligned}$$

— La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ vérifie alors la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{h(u_n) - \alpha}{h(u_n) - \beta} = q \times \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = qv_n.$$

La suite v_n est donc géométrique de raison q et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$.

2. Supposons que (Hom) admette une racine double γ . Le raisonnement est identique.

— On montre tout d'abord que $\frac{1}{h(x) - \gamma} = \frac{1}{x - \gamma} + r$ avec $r = \frac{2c}{a + d}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(x) - \gamma} &= \frac{1}{h(x) - h(\gamma)} = \frac{1}{\frac{ax + b}{cx + d} - \frac{a\gamma + b}{c\gamma + d}} = \frac{(cx + d)(c\gamma + d)}{(ax + b)(c\gamma + d) - (cx + d)(a\gamma + b)} \\ &= \frac{(cx + d)(c\gamma + d)}{axc\gamma + adx + bc\gamma + bd - axc\gamma - bcx - ad\gamma - bd} \\ &= \frac{(cx + d)(c\gamma + d)}{ad(x - \gamma) - bc(x - \gamma)} = \frac{(cx + d)(c\gamma + d)}{(ad - bc)(x - \gamma)} \\ &= \frac{c\gamma + d}{ad - bc} \times \frac{c(x - \gamma) + c\gamma + d}{x - \gamma} \\ &= \frac{(c\gamma + d)^2}{ad - bc} \times \frac{1}{x - \gamma} + \frac{c(c\gamma + d)}{ad - bc} \end{aligned}$$

À ce stade, c'est un peu technique : γ est la racine double de l'équation (Hom) i.e. , en se rappelant son cours de première, $\gamma = \frac{a - d}{2c}$. On obtient alors :

$$c\gamma + d = \frac{a + d}{2}. \quad (\text{XIV.1})$$

Comme le discriminant de (Hom) est nul, on obtient aussi $(d - a)^2 + 4bc = 0$ dont on tire :

$$ad - bc = ad + \frac{(d - a)^2}{4} = \frac{4ad + (d - a)^2}{4} = \frac{(d + a)^2}{4}. \quad (\text{XIV.2})$$

En combinant (XIV.1) et (XIV.2), on obtient alors :

$$\frac{(c\gamma + d)^2}{ad - bc} = \frac{\left(\frac{a + d}{2}\right)^2}{\frac{(a + d)^2}{4}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{c(c\gamma + d)}{ad - bc} = \frac{c \frac{a + d}{2}}{\frac{(a + d)^2}{4}} = \frac{2c}{a + d}. \quad (\text{XIV.3})$$

Avec (XIV.3), on obtient alors :

$$\frac{1}{h(x) - \gamma} = \frac{1}{x - \gamma} + \underbrace{\frac{2c}{a + d}}_r.$$

— La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{u_n - \gamma}$ vérifie alors la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - \gamma} = \frac{1}{h(u_n) - \gamma} = \frac{1}{u_n - \gamma} + \frac{2c}{a + d} = v_n + r.$$

La suite v_n est donc arithmétique raison $r = \frac{2c}{a + d}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - \gamma}$.

Exercice 3 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec :

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-4\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{2x-1}{x+4}.$$

1. Montrer que $f(]-1; +\infty[) \subset]-1; +\infty[$.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Montrer que l'application f admet -1 comme unique point fixe.
4. En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Méthode

- Étude d'une suite arithmético-géométrique, 5
- Montrer qu'une suite est arithmétique, 2
- Montrer qu'une suite est géométrique, 3

Point

- fixe, 4, 5

Raison

- d'une suite arithmétique, 1
- d'une suite géométrique, 2

Raisonnement

- par récurrence, 1

Somme

- des termes d'une suite, 1, 3

Suite

- arithmético-géométrique, 4
- arithmétique, 1, 6
- géométrique, 2, 4-6
- homographique, 5

INDEX