Remédiation

1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) \mathrm{d}x$.

2. Calculer à l'aide d'un changement de variables $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

3. À l'aide d'un changement de variables, calculer les primitives des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser :

   (a) $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$ (poser $x = 2+\sin(u)$)

   (b) $x \longmapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ (poser $x = \operatorname{sh}(u)$)

   (c) $x \longmapsto \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

4. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés :

   (a) $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $]-1,1[$.

   (b) $\operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = \operatorname{sh}^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.

5. Donner les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

   (a) $y'' + 2y' + y = 2\cos^2(x)$

   (b) $y''+2y'+3y = x\,\mathrm{e}^x \sin(x)$

6. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(\mathrm{E}) : \; x^2y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

   Indication : Poser $x = e^t$.

7. On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{L}) : \; x^2y'' + 4xy' + \left(2+x^2\right) y = 0.$$

   (a) Résoudre l'équation (L) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en posant $u = x^2y$.

   (b) Existe-t-il des solutions de (L) sur $\mathbb{R}$?

Remédiation