Remédiation

1. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) \mathrm{d}x$.

Correction : Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \ln(1+x^2)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$, on intègre par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) \mathrm{d}x &= \Big[x\ln(1+x^2)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)\Big]_0^1 \\ &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

2. Calculer à l'aide d'un changement de variables $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

Correction : En posant $x = \operatorname{sh}(u)$ *i.e.* $\mathrm{d}x = \operatorname{ch}(u)\,\mathrm{d}u$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\operatorname{argsh}(1)} \operatorname{ch}^2(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{argsh}(1)} 1+\operatorname{ch}(2u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\Big[u + \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2u)\Big]_0^{\operatorname{argsh}(1))} \qquad \left(\operatorname{argsh}(1) = \ln(1+\sqrt{2})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{argsh}(1) + \frac{1}{2}\operatorname{sh}\left(2\operatorname{argsh}(1)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{argsh}(1) + \operatorname{ch}\left(\operatorname{argsh}(1)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{argsh}(1) + \sqrt{1+1^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

Posons $u = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ *i.e.* $\mathrm{d}u = \dfrac{u^2+1}{2u}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\sqrt{\mathrm{e}-1}} \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\Big[u - \arctan(u)\Big]_0^{\sqrt{\mathrm{e}-1}} \\ &= 2\sqrt{\mathrm{e}-1} - 2\arctan\left(\sqrt{\mathrm{e}-1}\right).\end{aligned}$$

3. À l'aide d'un changement de variables, calculer les primitives des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser :

(a) $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$ (poser $x = 2+\sin(u)$)

(b) $x \longmapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ (poser $x = \mathrm{sh}\,(u)$)

(c) $x \longmapsto \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

Correction :

(a) Posons $t = 2+\sin(u)$ *i.e.* $\mathrm{d}t = \cos(u)\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}}\,\mathrm{d}t &= \int^u \frac{2+\sin(u)}{\sqrt{(1+\sin(u))\,(1-\sin(t))}}\cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int^u 2+\sin(u)\,\mathrm{d}u = 2u - \sqrt{1-\sin^2(u)} \\ &= 2\mathrm{arcsin}\,(t-2) - \sqrt{1-(t-2)^2} \\ &= 2\mathrm{arcsin}\,(t-2) - \sqrt{(t-1)(3-t)}.\end{aligned}$$

(b) Posons $t = \mathrm{sh}\,(u)$ *i.e.* $\mathrm{d}t = \mathrm{ch}\,(u)\,\mathrm{d}u$ et $u = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$.

$$\begin{aligned}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1+t^2}} &= \int^u \frac{\mathrm{ch}\,(u)\,\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}\,(u)+\mathrm{ch}\,(u)}\mathrm{d}u \\ &= \int^u \frac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2\,\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u = \int^u \frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2u})\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2u}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}\right).\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\int^x \frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t &= \int^x \left(1-\frac{2t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t \quad . \\ &= x-\ln(x^2+x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

4. Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés :

(a) $\sqrt{1-x^2}y'+y=1$ sur $]-1,1[$.

(b) $\mathrm{ch}\,(x)y'-\mathrm{sh}\,(x)y=\mathrm{sh}^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Correction :

(a) Sur $]-1\,;1[$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue donc les solutions homogènes sont de la forme

$$y_{\mathrm{H}} : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{arcsin}\,(x)}, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

La fonction constante à 1 est clairement solution.

Les solutions générales sont donc de la forme

$$y : x \longmapsto 1+\lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{arcsin}\,(x)}, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

(b) Comme $\operatorname{ch}(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les solutions homogènes sont de la forme

$$y : x \longmapsto \lambda \operatorname{ch}(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution sous la forme $y_p : x \longmapsto \lambda(x)\operatorname{ch}(x)$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

y_p est solution si, et seulement si $\lambda'(x) = \dfrac{\operatorname{sh}^3(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \operatorname{sh}(x) - \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}$ dont une primitive est $x \longmapsto \operatorname{ch}(x) + \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$.

Les solutions générales sont donc de la forme :

$$y : x \longmapsto \lambda \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}^2(x) + 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. Donner les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

(a) $y'' + 2y' + y = 2\cos^2(x)$ (b) $y''+2y'+3y = x\,\mathrm{e}^x \sin(x)$

Correction :

(a) Les solutions homogènes sont de la forme

$$y_{\mathrm{H}} : x \longmapsto (\lambda x + \mu)\, \mathrm{e}^{-x}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Comme $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$, d'après le théorème de superposition, cherchons des solutions particulières des équations

$$y'' + 2y' + y = 1 \quad \text{et} \quad y'' + 2y' + y = \cos(2x).$$

Pour la première la fonction constante à 1 est clairement solution.

Pour la seconde, cherchons une solution particulière sous la forme, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) \\ 2 \times \quad y_p'(x) &= 2\mu\cos(2x) - 2\lambda\sin(2x) \\ y_p''(x) &= -4\lambda\cos(2x) - 4\mu\sin(2x) \\ \cos(2x) &= (-3\lambda + 4\mu)\cos(2x) + (-4\lambda - 3\mu)\sin(2x) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3\lambda + 4\mu = 1 \\ -4\lambda - 3\mu = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{3}{25} \\ \mu = \dfrac{4}{25} \end{array} \right.$$

Les solutinos générales sont de la forme

$$y : x \longmapsto (\lambda x + \mu)\, \mathrm{e}^{-x} + 1 + \frac{1}{25}\left(4\sin(2x) - 3\cos(2x)\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Les solutions homogènes sont de la forme

$$y_{\mathrm{H}} : x \longmapsto \left(\lambda\cos\left(x\sqrt{2}\right) + \mu\sin\left(x\sqrt{2}\right)\right) \mathrm{e}^{-x}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$3 \times \quad y_p(x) = \Big((ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x)\Big)\,\mathrm{e}^x.$

ou $\quad (\mathrm{AX}+\mathrm{B})\Big(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)\Big)\,\mathrm{e}^x$ c'est pareil.

$$\begin{aligned}
2 \times \quad y_p'(x) &= \Big(((a+c)x+a+b+d)\cos(x) + ((c-a)x+c+d-b)\sin(x)\Big)\,\mathrm{e}^x \\
y_p''(x) &= \Big((2cx+2a+2c+2d)\cos(x) - (2ax+2a+2b-2c)\sin(x)\Big)\,\mathrm{e}^x \\
\mathrm{e}^x\sin(x) &= \Big(((5a+4c)x+4a+5b+2c+4d)\cos(x) + ((5c-4a)x-2a-4b+4c+5d)\sin(x)\Big)\,\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5a \quad +4c \quad = 0 \\ 4a+5b+2c+4d = 0 \\ -4a \quad +5c \quad = 1 \\ -2a-4b+4c+5d = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \qquad = -\dfrac{4}{41} \\ 205b \quad +164d - 16 + 10 = 0 \\ c \qquad = \dfrac{5}{41} \\ -164b \quad +205d + \ 8 + 20 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \qquad = -\dfrac{4}{41} \\ 205b \quad +164d = 6 \\ c \qquad = \dfrac{5}{41} \\ 164b \quad -205d = 28 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\dfrac{4}{41} \\ b = \dfrac{142}{1681} \\ c = \dfrac{5}{41} \\ d = -\dfrac{116}{1681} \end{array}\right.$$

Donc, à erreur de calcul près, on peut considérer

$$y_p : x \longmapsto \frac{1}{41}\left(\left(-4x+\frac{142}{41}\right)\cos(x) + \left(5x - \frac{116}{41}\right)\sin(x)\right)\,\mathrm{e}^x.$$

Et donc, les solutions générales sont sous la forme :

$y : x \longmapsto \left(\lambda\cos\left(x\sqrt{2}\right) + \mu\sin\left(x\sqrt{2}\right)\right)\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{41}\left(\left(-4x+\dfrac{142}{41}\right)\cos(x) + \left(5x - \dfrac{116}{41}\right)\sin(x)\right)\,\mathrm{e}^x,$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

6. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(\mathrm{E}) : \quad x^2y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

Indication : Poser $x = e^t$.

Correction : Posons z la fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\begin{aligned}
z(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right) &\iff & z(t) &= y(x) \\
z'(t) = \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) &\iff & z'(t) &= xy'(x) \\
z''(t) = \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t}y''\left(\mathrm{e}^t\right) &\iff & z''(t) &= xy'(x) + x^2y''(x) \\
&\iff & z''(t) - z'(t) &= x^2y''(x) \\
&\iff & z'' + 3z' + 2z &= x^2y'' + 4xy' + 2y
\end{aligned}$$

Remédiation

La fonction z est donc solution de d'une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants donc de la forme

$$z : t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \mu\,\mathrm{e}^{-2t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On trouve alors les solutions de l'équation initiale :

$$y : x \longmapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x^2}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

7. On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{L}) : \; x^2 y'' + 4xy' + (2 + x^2)\, y = 0.$$

(a) Résoudre l'équation (L) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en posant $u = x^2 y$.

(b) Existe-t-il des solutions de (L) sur $\mathbb{R}$?

Correction :

(a) Suivons le même raisonnement et posons $u = x^2 y$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
u = x^2 y \iff & \qquad y = \frac{u}{x^2} \\
u' = 2xy + x^2 y' \iff & \qquad y' = \frac{u' - 2\frac{u}{x}}{x^2} = \frac{xu' - 2u}{x^3} \\
u'' = 2y + 4xy' + x^2 y'' \iff & \qquad y'' = \frac{x^2 u'' - 2\frac{u}{x^2} - 4\frac{u'x - 2u}{x^2}}{x^2} = \frac{x^2 u'' - 4xu' + 6u}{x^4} \\
\iff & \quad x^2 y'' + 4xy' + (2 + x^2)\, y = \frac{x^2 u'' - 4xu' + 6u + 4xu' - 8u + (2 + x^2)u}{x^2} \\
\iff & \qquad 0 = u'' + u
\end{aligned}$$

La fonction u est donc solution de d'une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants donc de la forme $u : x \longmapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On trouve alors les solutions de l'équation initiale sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ (les constantes dépendent de ces intervalles) :

$$y : x \longmapsto \frac{\lambda_\pm \cos(x) + \mu_\pm \sin(x)}{x^2}, \quad \lambda_\pm, \mu_\pm \in \mathbb{R}.$$

(b) Quelles que soient les constantes $\lambda_\pm$, $\mu_\pm$ non nulles, $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = +\infty$ donc il est impossible de prolonger y en une solution même continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La seule solution sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction nulle (on le vérifiera aisément).

Remarque : Si le dénominateur avait été x et non x^2, on aurait pu le tenter avec $\lambda_\pm = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ mais pas là et on aurait eu, de toute manière des soucis pour prolonger en une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.