Méthode de variation de la constante d'ordre 2

On s'intéresse ici à la résolution sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln(x). \tag{E}$$

On notera (E_0) l'équation homogène associée : $y'' - \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{2}{1+x^2}y = 0.$ (E_0)

I. Calculs préliminaires :

1. Déterminer une primitive sur I de $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x(1+x^2)}$.
2. Déterminer une primitive sur I de la fonction $g : x \longmapsto g(x) = (1-x^2)\ln x$.

II. Résolution de (E_0) **:**

3. Montrer que $y_1 : x \longmapsto x$ est solution de (E_0).
4. Soit $y : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. On définit la fonction z par :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Montrer que y est solution de (E_0) si, et seulement si z' est solution de l'équation différentielle :

$$xu' + \frac{2}{1+x^2}\,u = 0. \tag{E'}$$

5. Résoudre l'équation différentielle (E′).
6. En déduire l'ensemble des solutions de (E_0).

III. Résolution de l'équation (E) **:**

7. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p : x \longmapsto y_p(x) = \lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1),$$

où λ et μ sont deux fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0. \tag{Lag$_1$}$$

(a) Exprimer y_p' et y_p'' en fonction de λ et μ.

(b) Montrer que y_p est solution de (E) si, et seulement si

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2+1)\ln x. \tag{Lag$_2$}$$

(c) Pour $x \in \mathrm{I}$, montrer que $\lambda'(x) = (1-x^2)\ln(x)$ et $\mu'(x) = x\ln(x)$.

(d) En déduire une expression des fonctions λ et μ puis d'une solution particulière de (E).

8. Donner l'ensemble des solutions de (E).