Méthode de variation de la constante d'ordre 2

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}\,y' + \frac{2}{1+x^2}\,y = (1+x^2)\ln(x). \qquad \text{(E)}$$

I. Calculs préliminaires :

1. D'après la méthode standard de décomposition en éléments simples, on multiplie l'expression par x avant d'évaluer en 0. On trouve alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} + \frac{cx+d}{1+x^2}.$$

La méthode est identique pour l'élément de deuxième espèce : on multiplie par $1+x^2$ avant d'évaluer en i et d'égaliser parties réelle et imaginaire :

$$\frac{2}{\mathrm{i}} = \mathrm{i}\,c + d \iff -2\,\mathrm{i} = \mathrm{i}\,c + d \iff c = -2 \quad \text{et} \quad d = 0.$$

On trouve finalement :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{1+x^2}.$$

Sur I, le dénominateur ne s'annule pas donc $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x(1+x^2)}$ y est continue.

Une primitive sur I est donc

$$\mathrm{F} : x \longmapsto 2\ln(x) - \ln(1+x^2) = \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right).$$

Commentaires : *Point de points sans préciser la continuité !*

2. À l'aide d'une intégration par parties, on vérifiera que $\mathrm{G} : x \longmapsto \left(x - \dfrac{1}{3}x^3\right)\ln(x) - x + \dfrac{1}{9}\,x^3$ convient.

II. Résolution de (E_0)

3. La fonction y_1 est deux fois dérivable sur I et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y_1''(x) - \frac{2x}{1+x^2}\,y_1'(x) + \frac{2}{1+x^2}\,y_1(x) = 0 - \frac{2x}{1+x^2}\times 1 + \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

Donc, y_1 est solution de (E_0).

Commentaires : *Dérivabilité avant la dérivée !*

4. Comme $x \neq 0$ sur I, z, quotient de fonctions deux fois dérivables et de dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ y est également deux fois dérivable et on a :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y(x) &= xz(x)\\ y'(x) &= z(x) + xz'(x)\\ y''(x) &= 2z'(x) + xz''(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi, } y \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0) &\iff y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0 \\
&\iff 2z'(x) + xz''(x) - \frac{2x}{1+x^2}(z(x)+xz'(x)) + \frac{2}{1+x^2}xz(x) = 0 \\
&\iff xz''(x) + 2\frac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{1+x^2}z'(x) = 0 \\
&\iff x(z')'(x) + \frac{2}{1+x^2}z'(x) = 0 \\
&\iff z' \text{ est solution de } xu'(x) + \frac{2}{1+x^2}u = 0. \qquad (\mathrm{E'})
\end{aligned}$$

Donc, y est solution de (E_0) si, et seulement si z' est solution de (E').

5. Comme $x \neq 0$, la solution générale de (E') est $x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où A est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2}{x(1+x^2)}$, fonction continue sur I.

   D'après (1), la solution générale de (E') est donc :

$$x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)} = \lambda\frac{1+x^2}{x^2} = \lambda\left(1+\frac{1}{x^2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. z' est donc de la forme $x \longmapsto \lambda\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ *i.e.* z est de la forme

$$z : x \longmapsto \lambda\left(x - \frac{1}{x}\right) + \mu, \quad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

   Enfin, $y = xz$ est de la forme :

$$y : x \longmapsto \lambda(x^2-1) + \mu x, \quad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

III. Résolution de (E)

7. (a) y_p est deux fois dérivable sur I comme produit et somme de fonctions qui le sont et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y_p'(x) = \cancel{x\lambda'(x)} + \lambda(x) + \underbrace{\cancel{\mu'(x)(x^2-1)}}_{=-x\lambda'(x)} + 2x\mu(x).$$

   Donc, $\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad y_p'(x) = \lambda(x) + 2x\mu(x)$ et, $y_p''(x) = \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x)$.

   (b) y_p est solution de (E) si, et seulement si , pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
(x^2+1)\ln(x) &= y_p'' - \frac{2x}{1+x^2}y_p' + \frac{2}{1+x^2}y_p \\
(x^2+1)\ln(x) &= \lambda' + 2\mu + 2x\mu' - \frac{2x}{1+x^2}(\lambda+2x\mu) + \frac{2}{1+x^2}(\lambda x + \mu(x^2-1)) \\
(x^2+1)\ln(x) &= \lambda' + 2x\mu' + \underbrace{\lambda\frac{\overbrace{-2x+2x}^{=0}}{1+x^2} + \mu\frac{\overbrace{2+2x^2-4x^2+2x^2-2}^{=0}}{1+x^2}}_{=0} \\
(x^2+1)\ln(x) &= \lambda' + 2x\mu'.
\end{aligned}$$

   Donc, y_p est solution de (E) si, et seulement si $\lambda' + 2x\mu = (x^2+1)\ln(x)$.

(c) Soit $x \in \mathrm{I}$, le couple $(\lambda'(x)\,;\mu'(x))$ est donc solution du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x\lambda'(x) & + & (x^2-1)\mu'(x) & = & 0 \\ \lambda'(x) & + & 2x\mu'(x) & = & (1+x^2)\ln x \end{array}\right. \quad \text{de déterminant } 1+x^2 \neq 0.$$

On trouve alors $\lambda'(x) = (1-x^2)\ln(x)$ et $\mu'(x) = x\ln(x)$.

(d) D'après (2), on a déjà :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \qquad \lambda(x) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \frac{x^3}{9}.$$

Déterminons une primitive de μ' sur I : Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{t^2}{2}$ et $t \longmapsto \ln(t)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, on peut intégrer par parties et on a :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad \int^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]^x - \int^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + \mathrm{C}. \quad (\mathrm{C} \in \mathbb{R})$$

On considère la primitive pour laquelle $\mathrm{C} = 0$ et on trouve :

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \qquad \mu(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}.$$

Une solution particulière de (E) sur I est donc :

$$\begin{aligned} y_p : x \longmapsto y_p(x) &= \lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1) \\ &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\ln(x) - x^2 + \frac{x^4}{9} + \left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right)(x^2-1) \\ &= \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)\ln(x) - \frac{x^2}{4}\left(3 + \frac{5}{9}x^2\right). \end{aligned}$$

8. D'après ce qui précède, la solution générale de (E) sur I est de la forme :

$$y : x \longmapsto \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)\ln(x) - \frac{x^2}{4}\left(3 + \frac{5}{9}x^2\right) + \lambda(x^2-1) + \mu x, \ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$