Équations différentielles linéaires 2

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $(x^2+2x+5)y'+y=x^2+3x+5$.

   $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $x^2+2x+5>0$ donc sur $\mathrm{I}\subset\mathbb{R}$,

   $$y_{\mathrm{H}} : x \longmapsto \frac{\lambda}{\sqrt{\mathrm{e}^{\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)}}},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

   Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto ax+b$.

   y_p est solution si, et seulement si $a(x^2-3x+2)+ax+b=x^2-2x+2$ *i.e.* $a=1$ et $b=0$.

   Les solutions générales sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme

   $$y : x \longmapsto x+\frac{\lambda}{\sqrt{\mathrm{e}^{\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)}}},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y''-y'-2y=\mathrm{ch}\,(2x)$.

   L'équation caractéristique admet -1 et 2 comme racine simple donc les solutions homogènes sont de la forme

   $$y_{\mathrm{H}} : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{2x}+\mu\,\mathrm{e}^{-x},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

   Comme 2 est racine simple de l'équation caractéristique, cherchons une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto x\Big(\mathrm{A}\mathrm{ch}\,(2x)+\mathrm{B}\mathrm{sh}\,(2x)\Big)$.

   Commentaires : *On pourrait aussi chercher une solution particulière sous la forme* $y_p : x \longmapsto x\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{B}\,\mathrm{e}^{-2x}$.

   On trouverait alors $y_p : x \longmapsto \dfrac{1}{6}x\,\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2x}$.

   y_p est solution si, et seulement si $y_p''-y_p'-2y_p=\mathrm{ch}\,(2x)$ avec, $\forall\, x\in\mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned}
   y_p(x) &= \mathrm{A}x\mathrm{ch}\,(2x)+\mathrm{B}x\mathrm{sh}\,(2x)\\
   y_p'(x) &= \Big(\mathrm{A}+2\mathrm{B}x\Big)\mathrm{ch}\,(2x)+\Big(\mathrm{B}+2\mathrm{A}x\Big)\mathrm{sh}\,(2x)\\
   y_p''(x) &= \Big(4\mathrm{A}x+4\mathrm{B}\Big)\mathrm{ch}\,(2x)+\Big(4\mathrm{A}+4\mathrm{B}x\Big)\mathrm{sh}\,(2x)\\
   \mathrm{ch}\,(2x) &= \Big((2\mathrm{A}-2\mathrm{B})x+4\mathrm{B}-\mathrm{A}\Big)\mathrm{ch}\,(2x)+\Big(\ldots\text{inutile ou seulement pour vérifier...}\Big)\mathrm{sh}\,(2x)\\
   &\iff \begin{cases}\mathrm{A}-\mathrm{B}=0\\ -\mathrm{A}+4\mathrm{B}=1.\end{cases} \iff \mathrm{A}=\mathrm{B}=\frac{1}{3}.
   \end{aligned}$$

   Une solution particulière pourra donc être $y_p : x \longmapsto \dfrac{1}{3}x\Big(\mathrm{ch}\,(2x)+\mathrm{sh}\,(2x)\Big)=\dfrac{1}{3}x\,\mathrm{e}^{2x}$.

   Les solutions générales sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme

   $$y : x \longmapsto \left(\frac{1}{3}x+\lambda\right)\,\mathrm{e}^{2x}+\mu\,\mathrm{e}^{-x},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

   Commentaires : *Avec l'autre solution particulière, on aurait eu*

   $$y : x \longmapsto \left(\frac{1}{6}x+\lambda'\right)\,\mathrm{e}^{2x}+\mu'\,\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2x},\ \lambda',\mu'\in\mathbb{R}.$$

   Ces deux formes ont l'air différent et pourtant elles engendrent bien le même ensemble de solutions.

Équations différentielles linéaires 2

1. Résoudre sur $]2\,;+\infty[$, l'équation différentielle $(x^2-3x+2)y'+y=x^2-2x+2$.

   Sur $\mathrm{I}\subset\,]2\,;+\infty[$, comme, $x\longmapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$ est continue, on obtient :

   $$y_{\mathrm{H}}:x\longmapsto \lambda\,\underbrace{\frac{x-1}{x-2}}_{>0},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

   Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p:x\longmapsto ax+b$.

   y_p est solution si, et seulement si $a(x^2+2x+5)+ax+b=x^2+3x+5$ *i.e.* $a=1$ et $b=0$.

   Les solutions générales sur $]2\,;+\infty[$ sont donc de la forme

   $$y:x\longmapsto x+\lambda\,\frac{x-1}{x-2},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y''-2y'+y=x\,\mathrm{e}^x$.

   L'équation caractéristique admet 1 comme racine double donc les solutions homogènes sont de la forme

   $$y_{\mathrm{H}}:x\longmapsto(\lambda x+\mu)\,\mathrm{e}^x,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

   Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p:x\longmapsto x^2(ax+b)\,\mathrm{e}^x$.

   y_p est solution si, et seulement si $y_p''-2y_p'+y_p=x\,\mathrm{e}^x$ avec, $\forall\,x\in\mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned}
   y_p(x)&=\left(ax^3+bx^2\right)\mathrm{e}^x\\
   y_p'(x)&=\left(ax^3+(3a+b)x^2+2bx\right)\mathrm{e}^x\\
   y_p''(x)&=\left(ax^3+(6a+b)x^2+(6a+4b)x+2b\right)\mathrm{e}^x\\
   x\,\mathrm{e}^x&=\left(6ax+2b\right)\mathrm{e}^x\\
   &\iff\begin{cases}6a=1\\2b=0.\end{cases}
   \end{aligned}$$

   Une solution particulière pourra donc être $y_p:x\longmapsto\dfrac{1}{6}x^3\,\mathrm{e}^x$.

   Les solutions générales sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme

   $$y:x\longmapsto\left(\frac{1}{6}x^3+\lambda x+\mu\right)\mathrm{e}^x,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$