Sommes usuelles

Théorème 1 (Somme des entiers, des carrés et des cubes) :
Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathrm{S}_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \mathrm{S}_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\mathrm{S}_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

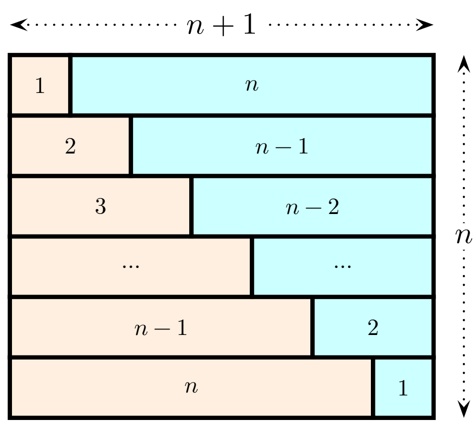

Figure 1 – $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Preuve : Toutes ces formules ont été démontrées par récurrence en terminale ou en début d'année mais les démonstrations directes sont possibles à l'aide de sommes télescopiques.

On pourrait d'ailleurs, généraliser ces démonstrations aux somme des puissances p-ième des entiers naturels.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

— D'une part $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - k^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k+1) = 2\mathrm{S}_1(n) + n$.

Et, par télescopage $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - k^2 = (n+1)^2 - 1$.

En identifiant, on trouve donc $\mathrm{S}_1(n) = \dfrac{(n+1)^2 - n - 1}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

— Pour $\mathrm{S}_2(n)$ on utilise la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 = (n+1)^3 - 1$.

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-k^3=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=3\mathrm{S}_2(n)+3\mathrm{S}_1(n)+n.$

$$\begin{aligned}\text{D'où } \mathrm{S}_2(n) &= \frac{1}{3}\left[(n+1)^3-1-3\times\frac{n(n+1)}{2}-n\right]\\ &= \frac{1}{6}\left[2(n+1)^3-2(n+1)-3n(n+1)\right]\\ &= \frac{(n+1)(2(n+1)^2-2-3n)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

— Enfin, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4-k^4=(n+1)^4-1$ mais aussi :

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4-k^4=(n+1)^4-1=4\mathrm{S}_3(n)+6\mathrm{S}_2(n)+4\mathrm{S}_1(n)+n.$$

$$\begin{aligned}\text{D'où } 4\mathrm{S}_3(n) &= (n+1)^4-1-6\mathrm{S}_2(n)-4\mathrm{S}_1(n)-n\\ &= (n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)\\ &= (n+1)(n^3+n^2)=n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

$$\mathrm{S}_3(n)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

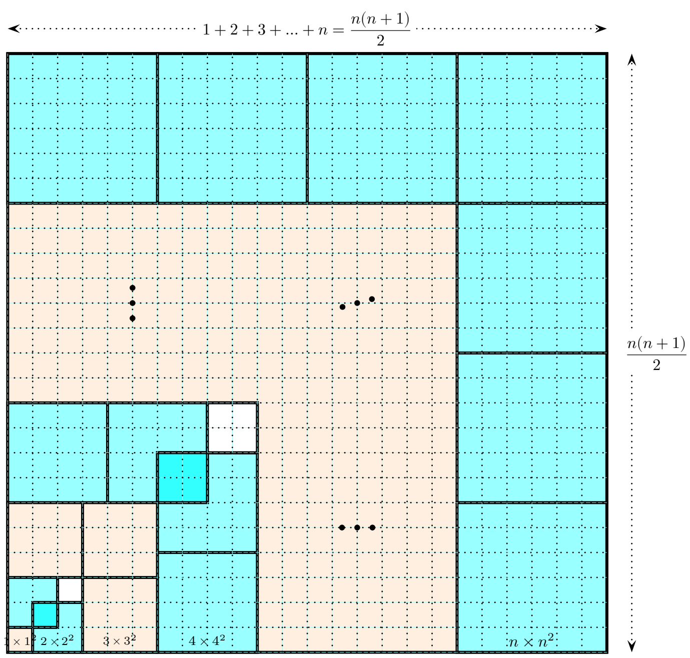

Figure 2 – $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$