Planche 1/ _____**Exercice 1** _____

Calculer $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx$.

Exercice 2 _____

Soit la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. M_a est-elle diagonalisable si $a \in \mathbb{R}$?
2. M_a est-elle diagonalisable si $a \in \mathbb{C}$?

Planche 2/ _____**Exercice 1** _____

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x) - 2\operatorname{sh}(2x) + \operatorname{sh}(3x)}{\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2}$.

Exercice 2 _____

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^k(x) \cos(kx)$.

Planche 3/ _____**Exercice 1** _____

Résoudre sur $]0; \pi[$, $\sin(x)y' - \cos(x)y = 1$.

Exercice 2 _____

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & -1 & 1 \\ 1-\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pour quelles valeurs de a l'application linéaire associée à A est-elle bijective ?

Planche 4/ _____**Exercice 1** _____

Calculer $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Exercice 2 _____

Soit le polynôme $P = (X + 1)^7 - X^7 - a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer a de façon à ce que P admette une racine double réelle

Planche 5/ _____**Exercice 1** _____

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Est-elle diagonalisable? Si oui, la diagonaliser.
2. Est-elle inversible?

Exercice 2 _____

Soit $z = i \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$, avec $\theta \neq 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que z est un réel.

Planche 6/ _____**Exercice 1** _____

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Est-elle diagonalisable? Si oui, la diagonaliser.
2. Est-elle inversible?

Exercice 2

Donner le rayon de convergence, puis calculer la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{nx^n}{3^n}$.

Planche 7/**Exercice 1**

On considère l'équation (E) : $\sin(x)y' - \cos(x)y + 1 = 0$

1. Sur quels intervalles peut-on résoudre l'équation (E) ?
2. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
3. Résoudre l'équation (E).
4. Existe-t-il des solutions globales sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

1. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à f .

Montrer que $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ et $\ker(f) = \ker(f \circ f)$.

2. De manière plus générale, E un espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E .

Montrer que : $\ker(f) = \ker(f \circ f) \Leftrightarrow \ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E$

Planche 8/**Exercice 1**

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x) \sin^3 x \, dx$.

Exercice 2

Soit $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f \mapsto f'' - 3f' + 2f.$$

Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer une base de $\ker \varphi$.

Exercice 3

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5 \sqrt[n]{4} - 4 \sqrt[n]{5})^n$.

Planche 9/

Exercice 1

Soient x, y et z des complexes, et $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix}$.

1. $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils des vecteurs propres de M ? M est-elle diagonalisable?
2. Condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que M soit inversible.
3. Condition nécessaire et suffisante sur x, y, z pour que M soit une matrice de symétrie.

Exercice 2

1. Étudier la série de Fourier de la fonction 2π -périodique f définie par $f(x) = x^2$ sur $[0; 2\pi[$.
2. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Planche 10/

Exercice 1

Déterminer les développements en série entières des fonctions : $x \mapsto \ln(2+x)$ et $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 2

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$, soit $M_{a,b} = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (n \geq 2)$.

Déterminer le rang de la matrice $M_{a,b}$

Planche 11/ _____**Exercice 1** _____

Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt.$

Exercice 2 _____

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x, y, z) \mapsto (x + z, y - x, y + z, x + y + 2z).$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?

Exercice 3 _____

Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions :

1. $(x, y) \mapsto \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$
2. $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $(x, y) \mapsto y^x$

Planche 12/ _____**Exercice 1** _____

1. Étudier la série de Fourier de la fonction 2π -périodique f définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi; \pi[$.
2. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2 _____

Trouver toutes les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Planche 13/**Exercice 1**

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et telle que $\Delta f = 0$ (laplacien), puis la fonction $g : (x, y) \mapsto x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que $\Delta g = 0$.

Exercice 2

Soit A et I deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les coefficients réels α et β tels que : $A^2 - \alpha A + \beta I = O$. Y a-t-il unicité de ces coefficients réels ?
- À quelle(s) condition(s) la matrice A est-elle inversible ? Préciser (lorsqu'elle l'est) son inverse.

Planche 14/**Exercice 1**

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z + 1)^4 + (z^2 + 1)^2 - (z + 1)^4 = 0$.

Exercice 2

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2+x}$

Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Planche 15/ _____

Exercice 1 _____

Soit $P = X^6 - i$

- Déterminer les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide de la question 1 et de la division euclidienne de $X^6 - i$ par $X^2 + i$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = i$ puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 _____

Soit $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}$

$$P \mapsto P(1) + P'(0).$$

- Montrer que u est une application linéaire.
- Donner une base de $\ker(u)$.
- Déterminer un supplémentaire S de $\ker(u)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
- On pose d l'application dérivation de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.

Donner une base de $\ker(d)$.

- Déterminer $\ker(u) \cap \ker(d)$.
- Déterminer une base de $\ker(v)$, avec $v = u \circ d$.

Planche 16/ _____

Exercice 1 _____

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

et soient $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

- Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice B représentant f dans la base $\mathcal{B}'$.
- Calculer A^n .
- Déterminer les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n - 4v_n \\ v_{n+1} = 9u_n + 10v_n \end{cases}$$

Exercice 2

Discuter selon la valeur de m , combien de fois se coupent les deux courbes suivantes : $f : x \mapsto e^x$ et $d : x \mapsto mx$, $m \in \mathbb{R}$

Planche 17/**Exercice 1**

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle : $y' + xy = 1$,

Exercice 2

Montrer que $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ est un espace vectoriel.

Exercice 3

On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$

1. Montrer que f est définie sur $]0; +\infty[^2$
2. Trouver un point a en lequel f admet un extremum local.

Planche 18/**Exercice 1**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
2. Est-elle inversible ?

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $x^2y' + 2xy = x^3$.

Planche 19/ _____**Exercice 1** _____

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5 = 0$.

Exercice 2 _____

On considère l'équation (E) : $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$

1. Résoudre l'équation (E) en utilisant le changement de variable $x = sh(t)$.
2. Trouver la solution dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(0, 1)$ et dont la tangente en ce point est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Planche 20/ _____**Exercice 1** _____

Soit $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n .

1. Montrer que $(1, (1+X), \dots, (1+X)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme quelconque P de $\mathbb{C}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 2 _____

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, Calculer $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$ et $\sum_{k=1}^n k^4$.

Planche 21/ _____**Exercice 1** _____

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

Montrer que B est nilpotente (il existe p entier tel que B^p est la matrice nulle) et en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de A^n .

Exercice 2

1. Rappeler la formule $\tan(a + b)$
2. Calculer $\tan(\alpha)$, avec $\alpha = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$
3. En déduire α .

Planche 22/

Exercice 1

Soit $u_n = \sqrt{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^3 + an}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2

Soit f une application linéaire telle que :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (-x + y, x + 2y + z).$$

On note $u_1 = (0, -1, 3)$, $u_2 = (1, 2, -3)$, $u_3 = (1, 1, -3)$, trois vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $v_1 = (-1, 1)$, $v_2 = (1, 2)$ des vecteur de $\mathbb{R}^2$.

Enfin, on note les familles de vecteurs $U = (u_1, u_2, u_3)$, $\gamma = (v_1, v_2)$, et $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que U est une base de $\mathbb{R}^3$ et γ une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$.
3. Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_3$ et γ .
4. Déterminer la matrice de f dans les bases U et γ .

Planche 23/

Exercice 1

Étudier la série de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\sin(ax)|$, avec a un réel.

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Planche 24/ _____

Exercice 1 _____

1. Étudier la série de Fourier de la fonction 2π -périodique f définie par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi[$.
2. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2 _____

Soit $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n .

1. Montrer que $(1, (1 + X), \dots, (1 + X)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme quelconque P de $\mathbb{C}_n[X]$ dans cette base.