Partie entière

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère les deux fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor.$$

1. (a) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lfloor x \rfloor$.

   On pourra distinguer les cas où x appartient à un intervalle de la forme $[2p\,;2p+1[$ ou $[2p+1\,;2p+2[$.

   (b) Soit $m \in \mathbb{N}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{m+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

   Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = m - \left\lfloor \dfrac{m}{2^{n+1}} \right\rfloor$.

   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2. (a) Montrer que g est constante sur $[0\,;1[$, et déterminer sa valeur.

   (b) Prouver que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x+1) = g(x) + 1$.

   (c) Montrer que $\forall\, p \in \mathbb{Z}$, $\forall\, x \in [p\,;p+1[$, $g(x) = \lfloor x \rfloor$.

   (d) En déduire une expression plus simple de la fonction g sur $\mathbb{R}$.