Partie entière

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère les deux fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor.$$

1. (a) Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lfloor x \rfloor$.

   On pourra distinguer les cas où x appartient à un intervalle de la forme $[2p\,;2p+1[$ ou $[2p+1\,;2p+2[$.

Correction : Soit $p \in \mathbb{Z}$.

— Supposons $x \in [2p\,;2p+1[$.

Alors : $\begin{cases} \dfrac{x}{2} \in \left[p, p+\dfrac{1}{2}\right[\subset [p\,;p+1[\text{ donc } \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor = p \\ \dfrac{x+1}{2} \in \left[p+\dfrac{1}{2}, p+1\right[\subset [p\,;p+1[\text{ donc } \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = p \end{cases}$

D'où, $f(x) = \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = p + p = 2p = \lfloor x \rfloor$.

— Supposons $x \in [2p+1\,;2p+2[$.

Alors : $\begin{cases} \dfrac{x}{2} \in \left[p+\dfrac{1}{2}, p+1\right[\subset [p\,;p+1[\text{ donc } \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor = p \\ \dfrac{x+1}{2} \in \left[p+1, p+\dfrac{3}{2}\right[\subset [p+1\,;p+2[\text{ donc } \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = p+1 \end{cases}$

D'où, $f(x) = \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = p + p + 1 = \lfloor x \rfloor$.

Dans tous les cas, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

   (b) Soit $m \in \mathbb{N}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{m+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

   Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = m - \left\lfloor \dfrac{m}{2^{n+1}} \right\rfloor$.

Correction : Soit $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{m+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{\frac{m}{2^k}+1}{2} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n} \left(\left\lfloor \frac{m}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{2^{k+1}} \right\rfloor \right)$$

En reconnaissant une somme télescopique,

$$= \left\lfloor \frac{m}{2^0} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{2^{n+1}} \right\rfloor = m - \left\lfloor \frac{m}{2^{n+1}} \right\rfloor.$$

(c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Correction : Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{m}{2^{n+1}} = 0^+$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\lfloor \dfrac{m}{2^{n+1}} \right\rfloor = 0$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{m+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = m$.

2. (a) Montrer que g est constante sur $[0\,;1[$, et déterminer sa valeur.

Correction : Soit $x \in [0\,;1[$. On a $\forall\, k \in [\![0,n]\!]$, $\quad 0 \leqslant x+k < n$.

Donc $\forall\, k \in [\![0,n]\!]$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{x+k}{n} < 1$ et ainsi $\forall\, k \in [\![0,n]\!]$, $\left\lfloor \dfrac{x+k}{n} \right\rfloor = 0$.

Par conséquent $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = 0$.

La fonction g est donc identiquement nulle sur $[0\,;1[$.

(b) Prouver que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x+1) = g(x)+1$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g(x+1) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+1+k}{n} \right\rfloor = \sum_{k'=1}^{n} \left\lfloor \frac{x+k'}{n} \right\rfloor \\
&= \sum_{k'=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k'}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+n}{n} \right\rfloor \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor + 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor + 1 \\
&= g(x)+1
\end{aligned}$$

(c) Montrer que $\forall\, p \in \mathbb{Z}$, $\forall\, x \in [p\,;p+1[$, $g(x) = \lfloor x \rfloor$.

Correction : Montrons ce résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

— Pour $p=0$, le résultat a été prouvé à la question (1a) .
— Supposons que pour un certain $p \in \mathbb{N}$, g et $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ coïncident sur $[p, p+1[$.

Considérons un réel x sur $[p+1, p+2[$.

En appliquant le résultat de la question précédente à $x' = x-1$, on aura $g(x) = g(x'+1) = g(x')+1$.

Or, $x' \in [p, p+1[$ donc par hypothèse de récurrence, $g(x') = \lfloor x' \rfloor$.

D'où, $g(x) = \lfloor x' \rfloor + 1 = \lfloor x' + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Le résultat est donc établi par récurrence pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Soit $p \in \mathbb{Z}_-$.

— Pour $p = 0$, le résultat a été prouvé à la question (1a) .
— Supposons que pour un certain $p \in \mathbb{Z}^-$, g et $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ coïncident sur $[p, p+1[$.

 Considérons un réel x sur $[p-1, p[$. On aura $x + 1 \in [p, p+1[$.

 D'où, $g(x) = g(x+1) - 1 = \lfloor x + 1 \rfloor - 1 = \lfloor x \rfloor$.

Par **récurrence descendante**, on a prouvé le résultat pour tout $p \in \mathbb{Z}^-$.

Le résultat est donc vrai pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

(d) En déduire une expression plus simple de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $p = \lfloor x \rfloor$ tel que $x \in [p\,; p+1[$.

D'après la question précédente, $g(x) = \lfloor x \rfloor$.

Finalement, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Partie entière