

Équations différentielles linéaires & Nombres Complexes II

1. Équations complexes

- Exponentielle complexe, propriétés.
- Racines carrées d'un complexe, existence d'exactly deux racines pour tout complexe non nul. Détermination directe par la forme polaire et/ou par le calcul sous la forme algébrique.
- Équations complexes du second degré. Discriminant complexe et expression des racines. Relations racines-coefficients : $s = z_1 + z_2$ et $p = z_1 z_2$ avec $z^2 - sz + p$.
- Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Stabilité par produit et inverse/conjugué. Somme des racines et factorisation de $z^n - 1$.
- Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe z . Expression à partir de la forme polaire de z .
- Caractérisation par les affixes de la colinéarité/alignement, de l'orthogonalité.
- Translation, rotation, homothétie. Définitions géométriques et applications complexes associées.

2. Équations différentielles linéaires d'ordre 1

- Définition. Équation homogène associée. Stabilité de l'ensemble des solutions de l'équation homogène par combinaisons linéaires.
- Résolution de l'équation homogène.
- Ensemble des solutions de l'équation non homogène à l'aide d'une solution.
- Principe de superposition.
- Méthode de variation de la constante.
- Problème de Cauchy d'une équation différentielle d'ordre 1, existence et unicité.
- Les problème de raccord on été évoqués.

3. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

- Définition. Équation homogène associée. Stabilité de l'ensemble des solutions de l'équation homogène par combinaisons linéaires.
- Équation caractéristique associée.
- Ensemble des solutions complexes et réelles de l'équation homogène.
- Structure de l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0$.
- Principe de superposition.
- Recherche de la solution particulière lorsque le second membre est du type $P(x)e^{mx}$ où $P(x)$ est un polynôme, ou lorsque le second membre est trigonométrique.
- Problème de Cauchy. Unicité et existence de la solution (admis).

Questions de cours possibles ^[1] :

1. Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.
2. (★) Les racines n -ièmes de l'unité sont **exactement** de la forme $e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.
3. Caractérisation complexe de la colinéarité et de l'orthogonalité de deux vecteurs.
4. Caractérisation complexe d'un rectangle isocèle.
5. La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ a pour écriture complexe : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
6. Équation d'ordre 1 avec second membre : structure de l'ensemble des solutions.
7. (★) Méthode de variation de la constante pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
8. Solutions complexes d'une EDL2 homogène à coefficients constants (énoncé complet et démonstration pour le cas $\Delta \neq 0$)

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.