Équations différentielles linéaires et Nombres Complexes II

Question de cours : Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(1+2i)z+i-1=0$.

Exercice 2 : Soit l'équation différentielle (E) $\quad y'+2xy=x$.

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Calculer la solution de (E) vérifiant $y(0)=1$.

Correction : Les primitives de la fonction $a(x)=2x$ sont les fonctions

$$\mathrm{A}(x)=x^2+k,\quad \text{où } k\in\mathbb{R} \text{ est une constante réelle quelconque.}$$

Donc les solutions de l'équation homogène associée à E sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ du type : $y(x)=ce^{-x^2}$ où $c\in\mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

La fonction constante égale à $\dfrac{1}{2}$ est clairement solution de (E).

Par conséquent les solutions de E sont toutes les fonctions de la forme :

$$y(x)=ce^{-x^2}+\frac{1}{2},\ c\in\mathbb{R}.$$

Pour y solution de E, la condition $y(0)=1$ équivaut à $c=\dfrac{1}{2}$.

D'où $y(x)=\dfrac{1}{2}(\,\mathrm{e}^{-x^2}+1)$.

Exercice 3 : Résoudre $y''+y=2\cos^2 x$

Correction : Les solutions de l'équation homogène sont les $\lambda \cos x + \mu \sin x$. Le second membre peut en fait se réécrire $\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$: d'après le principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme $a + b\cos(2x) + c\sin(2x)$.

En remplaçant, on trouve qu'une telle fonction est solution si $a = 1$, $b = -\dfrac{1}{3}$, $c = 0$.

Les solutions générales sont donc les $\lambda \cos x + \mu \sin x - \dfrac{1}{3}\cos(2x) + 1$.

Équations différentielles linéaires et Nombres Complexes II

Question de cours : Caractérisation complexe d'un rectangle isocèle.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$.

Correction : L'équation $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$ a pour solutions : $\dfrac{\sqrt{3}+2+i}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}-2-i}{2}$.

Exercice 2 : Résoudre $y' + y = 2\sin x$.

Correction : Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec second membre.

Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il suffit ensuite de trouver une solution particulière de (E_2). Le second membre est cette fois une fonction trigonométrique, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de $\cos$ et $\sin$:
$y_0(x) = a\cos x + b\sin x$ est solution de (E_2)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) + y_0(x) = 2\sin x$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (a+b)\cos x + (-a+b)\sin x = 2\sin x$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = -\cos x + \sin x$ convient.

Les solutions de (E_2) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = -\cos x + \sin x + \lambda e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Exercice 3 : Résoudre $x'' - 3x' + 2x = e^{2t}$

Correction : $t \mapsto k_1 e^{2t} + k_2 e^t + t e^{2t}$.

Équations différentielles linéaires et Nombres Complexes II

Question de cours : Équation d'ordre 1 avec second membre : structure de l'ensemble des solutions. (énoncé et démonstration)

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0$.

Correction : L'équation $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0$ a pour solutions : $5 - 12i$, $-2i$.

Exercice 2 : Résoudre $y' - y = (x + 1)e^x$.

Correction : Les solutions de l'équation homogène associée $y' - y = 0$ sont les $y(x) = \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre est le produit d'une fonction exponentielle par une fonction polynomiale de degré $d = 1$: or la fonction exponentielle du second membre est la même (e^x) que celle qui apparaît dans les solutions de l'équation homogène. On cherche donc une solution particulière sous la forme d'un produit de e^x par une fonction polynomiale de degré $d + 1 = 2$:
$y_0(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ est solution de (E_3)
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y_0'(x) - y_0(x) = (x + 1)e^x$
$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (2ax + b)e^x = (x + 1)e^x$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on voit que $y_0(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x)e^x$ convient.

Les solutions de (E_3) sont obtenues en faisant la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène :

$$y(x) = (\frac{1}{2}x^2 + x + \lambda)e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

où λ est un paramètre réel.

Exercice 3 : Résoudre $-2x'' + x' + x = 10\cos t$

Correction : $t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{2}} + \mu e^t + 3\cos t + \sin t$.

Équations différentielles linéaires et Nombres Complexes II

Question de cours : Solutions complexes d'une EDL2 homogène à coefficients constants (énoncé complet et démonstration pour le cas $\Delta \neq 0$)

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$.

Correction : L'équation $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$ a pour solutions : $2+3i$, $1+i$.

Exercice 2 : Résoudre $xy' - y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Correction : $x \mapsto x(-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln x + k)$.

Exercice 3 : Résoudre $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{ch} 2x$

Correction : $x \mapsto (k_1 x + k_2)e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 e^{2x} + \frac{1}{32}e^{-2x}$.

Équations différentielles linéaires et Nombres Complexes II

Question de cours : La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ a pour écriture complexe : $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}(z - \omega)$.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

Correction : L'équation $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ a pour solutions : $2 + 3i$, $-2 - 3i$, $2 - 3i$, $-2 + 3i$.

Exercice 2 : Résoudre $(1 + x)y' + y = (1 + x)\sin x$.

Correction : $y = -\cos x + \dfrac{\sin x + \lambda}{1 + x}$.

Exercice 3 : Résoudre $y'' - 3y' + 2y = e^x - x - 1$

Correction : $x \mapsto -xe^x - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{4} + \lambda e^{2x} + \mu e^x$.

Équations différentielles linéaires et Nombres Complexes II

Question de cours : Caractérisation complexe de la colinéarité et de l'orthogonalité de deux vecteurs.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z^2-1)^3 = -8z^3$.

Correction : $\mathcal{S} = \left\{-1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i), \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i), \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i), \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i)\right\}$.

Exercice 2 : Résoudre $y' - y\ln x - x^x = 0$.

Correction : $x \mapsto x^x(1+ke^{-x})$.

Exercice 3 : Résoudre $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$

Équations différentielles linéaires et Nombres Complexes II

Question de cours : Méthode de variation de la constante pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -16\bar{z}^7$.

Correction :

- 0 est solution.
- On pose $z = \rho e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned} z^3 = -16\bar{z}^7 &\iff \rho^3 e^{3i\theta} = -16\rho^7 e^{-7i\theta} \\ &\iff \frac{1}{\rho^4} e^{10i\theta} = 16 e^{i\pi} \\ &\iff \begin{cases} \dfrac{1}{\rho^4} = 16 \\ 10\theta = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \rho = \dfrac{1}{2} \\ \theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{10} (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{0, \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{3i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{5i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{7i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{11i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{13i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{15i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{17i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{19i\pi}{10}}\right\}}$$

Exercice 2 : Résoudre $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$.

Correction : $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2-1}(k + \ln|x|)$.

Exercice 3 : Résoudre $y'' - 4y' + 13y = 10\cos 2x + 25\sin 2x$.

Correction : $y : x \longmapsto e^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + 2\cos 2x + \sin 2x$.

Équations différentielles linéaires et Nombres Complexes II

Question de cours : Les racines n-ièmes de l'unité sont **exactement** de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0\,;n-1]\!]$.

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

Correction : $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \dfrac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$

$$\mathcal{S} = \left\{\tan\frac{\alpha}{3}, \tan\frac{\alpha+\pi}{3}, \tan\frac{\alpha+2\pi}{3}\right\}.$$

Exercice 2 : Résoudre $(x+i)y' + y = 1 + 2x\arctan x$.

Correction : $x \mapsto \dfrac{k}{1-ix} + (x-i)\arctan x$.

Exercice 3 : Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}$$

Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = -1$ et $f(0) = 1$.

Correction : $x \mapsto \left(\dfrac{x^2}{2} + k_1x + k_2\right)e^{2x}$ et $f : x \mapsto \left(\dfrac{x^2}{2} + 3x - 1\right)e^{2x}$.