Fichiers Nombres-Complexes-II-Equations a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(1+2i)z+i-1=0$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-\sqrt{3}z-i=0$.

Correction : L'équation $z^2-\sqrt{3}z-i=0$ a pour solutions : $\dfrac{\sqrt{3}+2+i}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}-2-i}{2}$.

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$.

Correction : L'équation $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$ a pour solutions : $5-12i$, $-2i$.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$.

Correction : L'équation $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$ a pour solutions : $2+3i$, $1+i$.

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+10z^2+169=0$.

Correction : L'équation $z^4+10z^2+169=0$ a pour solutions : $2+3i$, $-2-3i$, $2-3i$, $-2+3i$.

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Résoudre l'équation $(7-6i)z^2-2(7-6i)z-85=0$.

Correction : $\Delta=608-594i=(27-11i)^2$.

$$\boxed{\mathcal{S}=\{-2-i,4+i\}}$$

Remarque : $(7-6i)z^2-2(7-6i)z-85=0 \iff z^2-2z-(7+6i)=0$, et $\Delta'=8+6i=(1+3i)^2$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

Correction : $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}=\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}=e^{2i\alpha}$

$$\mathcal{S}=\left\{\tan\frac{\alpha}{3},\tan\frac{\alpha+\pi}{3},\tan\frac{\alpha+2\pi}{3}\right\}.$$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+2z^2+4=0$.

Correction : L'équation $z^4+2z^2+4=0$ a pour solutions : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i\sqrt{3})$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1-i\sqrt{3})$.

Exercices plus ardus :

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -16\bar{z}^7$.

Correction :

- 0 est solution.
- On pose $z = \rho e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned} z^3 = -16\bar{z}^7 &\iff \rho^3 e^{3i\theta} = -16\rho^7 e^{-7i\theta} \\ &\iff \frac{1}{\rho^4} e^{10i\theta} = 16e^{i\pi} \\ &\iff \begin{cases} \frac{1}{\rho^4} = 16 \\ 10\theta = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \rho = \frac{1}{2} \\ \theta = \frac{(2k+1)\pi}{10} (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{0, \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{3i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{5i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{7i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{11i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{13i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{15i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{17i\pi}{10}}, \frac{1}{2}e^{\frac{19i\pi}{10}}\right\}}$$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Résoudre l'équation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos kx}{(\cos x)^k} = 0$.

Correction : On cherche $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Si $x = 0\ [2\pi]$, la somme vaut n et est par conséquent non nulle.

Sinon, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos kx}{(\cos x)^k} = \mathrm{Re}\left(\frac{\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^n - 1}{\frac{e^{ix}}{\cos x} - 1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{e^{inx}}{\cos^n x} - 1}{i\tan x}\right) = \frac{\sin nx}{\cos^n x \tan x}$

La somme est nulle si et seulement si $\sin nx = 0$, i.e. $x = 0\ \left[\frac{\pi}{n}\right]$.

Exercice 3 : Résoudre en x, $x^n + \binom{1}{n} x^{n-1}\cos\alpha + \cdots + \binom{n}{n}\cos(n\alpha) = 0$.

Correction : $\frac{1}{2}\Big((x+e^{i\alpha})^n + (x+e^{-i\alpha})^n\Big) = 0 \iff x = \mathrm{cotan}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\sin\alpha - \cos\alpha.$

Exercice 4 : Soit $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre $\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c &= 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c &= 0 \end{cases}$

Correction :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases} &\iff (\cos a + \cos b + \cos c) + i(\sin a + \sin b + \sin c) = 0 \iff e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \\ &\Rightarrow |e^{ia} + e^{ib}| = |-e^{ic}| = 1 \iff |e^{ia/2}e^{ib/2}(e^{i(a-b)/2} + e^{-i(a-b)/2})| = 1 \\ &\iff |\cos\frac{a-b}{2}| = \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{a-b}{2} \in \left(\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right) \iff a - b \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} /\ b = a + \varepsilon\frac{2\pi}{3} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Par suite, nécessairement, $e^{ib} = je^{ia}$ ou $e^{ib} = j^2 e^{ia}$.

Réciproquement, si $e^{ib} = je^{ia}$ ou encore $b = a + \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \iff e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j)e^{ia} = j^2 e^{ia} \iff \exists k' \in \mathbb{Z}/\ c = a - \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,$$

et si $e^{ib} = j^2 e^{ia}$ ou encore $b = a - \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \iff e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j^2)e^{ia} = je^{ia} \iff \exists k' \in \mathbb{Z}/\ c = a + \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi.$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(a, a + \varepsilon\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, a - \varepsilon\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi),\ a \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in \{-1, 1\},\ (k, k') \in \mathbb{Z}^2\}.}$$