# Fichiers Nombres-Complexes-II-Racines a, b et c

## EXERCICES FACILES :

**Exercice 1 :**

1. Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

   En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

2. Calculer les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

**Correction :** Par la méthode usuelle nous calculons les racines carrées $\omega, -\omega$ de $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, nous obtenons

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}},$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Mais nous remarquons que $z$ s'écrit également

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et $e^{i\frac{\pi}{8}}$ vérifie

$$\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Cela signifie que $e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée de $z$, donc $e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ est égal à $\omega$ ou $-\omega$.

Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ alors $e^{i\frac{\pi}{8}} = \omega$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

**Exercice 2 :** Calculer les racines carrées de 1 et $24-10i$.

**Correction :**

- Les racines carrées de 1 sont : $+1$ et $-1$.
- Les racines carrées de $24-10i$ sont : $5-i$ et $-5+i$.

**Exercice 3 :** Calculer les racines carrées de $i$ et $3+4i$.

**Correction :**

- Les racines carrées de $i$ sont : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
- Les racines carrées de $3+4i$ sont : $2+i$ et $-2-i$.

**Exercice 4 :** Calculer les racines carrées de $8-6i$ et $7+24i$.

**Correction :**

- Les racines carrées de $8-6i$ sont donc $\omega_1 = 3-i$ et $\omega_2 = -\omega_1 = -3+i$.
- Les racines carrées de $7+24i$ sont : $4+3i$ et $-4-3i$.

**Exercice 5 :** Calculer les racines carrées de $3-4i$ et $i$.

**Correction :** Les racines carrées de $3-4i$ sont : $2-i$ et $-2+i$.

## Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Calculer les racines quatrièmes de $-119+120i$.

Correction : $3+2i,\ -3-2i,\ 2-3i,\ -2+3i$.

Exercice 2 : Résoudre : $z^4-(5-14i)z^2-2(12+5i)=0$.

Correction : $z^4-(5-14i)z^2-2(12+5i)=0 \iff \mathrm{Z}^2-(5-14i)\mathrm{Z}-2(12+5i)=0$ en posant $\mathrm{Z}=z^2$

Le discriminant vaut $\Delta=25(-3-4i)$ et une de ses racines est $\delta=5(1-2i)$.

On obtient : $\mathrm{Z}=-2i$ ou $\mathrm{Z}=5-12i$.

$$\mathcal{S}=\{1-i,-1+i,3-2i,-3+2i\}.$$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ : $(z^2-1)^3=-8z^3$.

Correction : $\mathcal{S}=\left\{-1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i),\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i),\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i),\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i)\right\}$.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+z+1)^2+1=0$.

Correction :

$$\begin{aligned}(z^2+z+1)^2+1=0 &\iff z^2+z+1=i \text{ ou } z^2+z+1=-i\\ &\iff z^2+z+(1-i)=0 \text{ ou } z^2+z+(1+i)=0\\ &\iff z=i \text{ ou } z=-1-i \text{ ou } z=-i \text{ ou } z=-1+i\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\{i,-i,-1-i,-1+i\}}.$$

Exercice 5 : Résoudre l'équation $z^8=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Correction : $z^8=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i} \iff z^8=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$.

$$\mathcal{S}=\left\{\sqrt[16]{\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{96}+\frac{2k\pi}{8}\right)}, k\in[\![0,7]\!]\right\}.$$

Exercice 6 : Résoudre $z^4=1+i\sqrt{3}$.

Correction : $z^4=1+i\sqrt{3} \iff z^4=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $z=\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)}$.

Les solutions sont : $\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$; $\sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$, $\sqrt[4]{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$, $\sqrt[4]{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$.

Exercice 7 : En écrivant de deux manières différentes les racines carrées de $i-1$, déterminer les valeurs de : $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Correction : $\cos\dfrac{3\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$.

## EXERCICES PLUS ARDUS :

**Exercice 1** : Soit $n$ un entier naturel non nul fixé.

1. Résoudre l'équation (E) : $(1+z)^{2n} = (1-z)^{2n}$.
2. Calculer le produit des racines non nulles.

**Exercice 2** : Résoudre dans $\mathbb{C}$ de deux façons différentes l'équation (E) : $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$.

En déduire les tangentes des nombres $\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{2\pi}{5}$ sous la forme $\sqrt{p+q\sqrt{n}}$ avec $p, q, n \in \mathbb{Z}$.

**Correction** : $\mathcal{S} = \left\{0, \tan\frac{\pi}{5}, \tan\frac{2\pi}{5}, \tan\frac{3\pi}{5}, \tan\frac{4\pi}{5}\right\} = \left\{0, \sqrt{5-2\sqrt{5}}, -\sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{5+2\sqrt{5}}, -\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right\}$

D'où $\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

**Exercice 3** : Soit $\omega \in \mathbb{U}_7 \setminus \{1\}$.

1. Calculer $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6$.
2. Calculer $\dfrac{\omega}{1+\omega^2} + \dfrac{\omega^2}{1+\omega^4} + \dfrac{\omega^3}{1+\omega^6}$.
3. En déduire $\dfrac{1}{\cos\frac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{6\pi}{7}}$.

**Correction** :

1. $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6 = 0$.
2. $\dfrac{\omega}{1+\omega^2} + \dfrac{\omega^2}{1+\omega^4} + \dfrac{\omega^3}{1+\omega^6} = \dfrac{2+2\omega+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^4+2\omega^5}{1+\omega^2+\omega^4+2\omega^6+\omega+\omega^3+\omega^5} = \dfrac{-2\omega^6}{\omega^6} = -2$
3. En posant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $\dfrac{1}{\cos\frac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{7}} + \dfrac{1}{\cos\frac{6\pi}{7}} = \dfrac{2}{\omega+\omega^{-1}} + \dfrac{2}{\omega^2+\omega^{-2}} + \dfrac{2}{\omega^3+\omega^{-3}}$
$$= \frac{2\omega}{\omega^2+1} + \frac{2\omega^2}{\omega^4+1} + \frac{2\omega^3}{\omega^6+1} = -4.$$

**Remarque** : L'heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas.