Matrices

On considère la matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$ définie par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Compléter :

1. $\mathrm{I} = [\![1\,;4]\!]$.
2. $a_{1,3} = 3.$
3. $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4 3.$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} a_{2,k} = a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} = 4+5+6 = 15.$
5. $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant 4,\ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant 3,\ a_{i,j+1} = a_{i,j}+1.$
6. $\mathrm{A} = (3i+j-3)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$

Une seule réponse exacte par question.

On note E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1. Les E_{ij} sont appelées **matrices élémentaires**.

1. Soient A et B deux matrices de tailles respectives 4×3 et 3×2. Alors le produit AB

   (a) ☐ est de taille 3×3
   (b) ☑ est de taille 4×2
   (c) ☐ est de taille 12×6
   (d) ☐ n'a pas de sens

2. Combien vaut la matrice $(\mathrm{E}_{12}+\mathrm{E}_{21})^2$?

   (a) ☐ $2\mathrm{E}_{11}$
   (b) ☑ $\mathrm{E}_{11}+\mathrm{E}_{22}$
   (c) ☐ $2\mathrm{E}_{22}$
   (d) ☐ $\mathrm{E}_{12}+\mathrm{E}_{21}$

3. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice $(\mathrm{M}-\mathrm{I}_3)(\mathrm{M}-2\mathrm{I}_3)(\mathrm{M}-3\mathrm{I}_3)$ vaut :

   (a) ☐ $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
   (b) ☐ $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
   (c) ☑ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (d) ☐ $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

4. Laquelle des matrices suivantes vérifie $\mathrm{M}^2 = -\mathrm{I}_2$?

   (a) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) ☑ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec la matrice $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

   (a) ☐ A est triangulaire supérieure
   (b) ☐ $a = c = d = 0$
   (c) ☑ $c = 0$ et $a = d$
   (d) ☐ $b = 0$

6. Laquelle des hypothèses suivantes n'implique pas que la matrice carrée A soit aussi diagonale ?

   (a) ☐ $\mathrm{A}^\top$ est diagonale
   (b) ☑ A^2 est diagonale
   (c) ☐ $\mathrm{A} - \mathrm{I}$ est diagonale
   (d) ☐ 2A est diagonale

7. Si A est une matrice carrée, $\mathrm{A}^\top\mathrm{A}$ est toujours

   (a) ☐ triangulaire supérieure
   (b) ☐ diagonale
   (c) ☐ antisymétrique
   (d) ☑ symétrique

8. Si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible, son inverse est

   (a) ☐ triangulaire inférieure
   (b) ☑ triangulaire supérieure
   (c) ☐ symétrique
   (d) ☐ une telle matrice n'est jamais inversible

9. L'inverse de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est

   (a) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ (b) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$ (c) ☑ $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ (d) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

10. On calcule tous les produits $\mathrm{E}_{12}\mathrm{E}_{ij}$. Combien de ces produits sont nuls ?

   (a) ☐ $n^2 - n$ (b) ☐ n^3 (c) ☐ aucun car E_{12} est non nulle (d) ☑ n

11. Si M est une matrice carrée telle que $\mathrm{M}^\top = 2\mathrm{M}$, alors

   (a) ☐ les coefficients diagonaux de M sont non nuls
   (b) ☐ M est une matrice diagonale
   (c) ☑ M est nulle
   (d) ☐ M est une matrice symétrique

12. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Si on calcule BA avec $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cela revient à opérer sur A :

   (a) ☑ $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + 2\mathrm{L}_2$
   (b) ☐ $\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + 2\mathrm{C}_2$
   (c) ☐ $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 2\mathrm{L}_1$
   (d) ☐ $\mathrm{C}_2 \leftarrow \mathrm{C}_2 + 2\mathrm{C}_1$

Matrices

On considère la matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{(i;j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$ définie par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Compléter :

1. $\mathrm{J} = [\![1\,;3]\!]$.
2. $a_{3,1} = 7.$
3. $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3.$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} a_{k,2} = a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} + a_{4,2}$ $= 2 + 5 + 8 + 11 = 26.$
5. $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant 4,\ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant 3,\ a_{i+1,j} = a_{i,j} + 3.$
6. $\mathrm{A} = (3i + j - 3)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$

Une seule réponse exacte par question.

On note E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1. Les E_{ij} sont appelées **matrices élémentaires**.

1. Soient A et B deux matrices de tailles respectives 4×3 et 2×3. Alors le produit AB
   (a) ☐ est de taille 3×3
   (b) ☑ n'a pas de sens
   (c) ☐ est de taille 4×2
   (d) ☐ est de taille 12×6

2. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice $(\mathrm{M} - 3\mathrm{I}_3)(\mathrm{M} - 2\mathrm{I}_3)(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)$ vaut :
   (a) ☑ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) ☐ $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
   (c) ☐ $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
   (d) ☐ $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

3. Laquelle des matrices suivantes vérifie $\mathrm{M}^2 = \mathrm{I}_2$?
   (a) ☑ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (c) ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   (d) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

   (a) ☑ $b = 0$ et $a = d$
   (b) ☐ A est triangulaire supérieure
   (c) ☐ $a = c = d = 0$
   (d) ☐ $b = 0$

5. Laquelle des hypothèses suivantes n'implique pas que la matrice carrée A soit aussi diagonale ?

   (a) ☐ $A^\top$ est diagonale
   (b) ☐ $A + I$ est diagonale
   (c) ☑ A^2 est diagonale
   (d) ☐ A^{-1} est diagonale

6. Si A est une matrice carrée, $A^\top - A$ est toujours

   (a) ☐ triangulaire supérieure
   (b) ☐ diagonale
   (c) ☑ antisymétrique
   (d) ☐ symétrique

7. Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure inversible, son inverse est

   (a) ☐ triangulaire supérieure
   (b) ☐ symétrique
   (c) ☐ une telle matrice n'est jamais inversible
   (d) ☑ triangulaire inférieure

8. L'inverse de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ est

   (a) ☐ $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$
   (b) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & -1/3 \end{pmatrix}$
   (c) ☑ $\begin{pmatrix} -1 & -2/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$
   (d) ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

9. Combien vaut la matrice $(E_{12} + E_{21})^2$?

   (a) ☐ $2E_{11}$
   (b) ☐ $2E_{22}$
   (c) ☑ $E_{11} + E_{22}$
   (d) ☐ $E_{12} + E_{21}$

10. On calcule tous les produits $E_{ij}E_{12}$. Combien de ces produits sont nuls ?

    (a) ☐ $n^2 - n$
    (b) ☐ n^3
    (c) ☑ n
    (d) ☐ aucun car E_{12} est non nulle

11. Si M est une matrice carrée telle que $M^\top = -2M$, alors

    (a) ☐ les coefficients diagonaux de M sont non nuls
    (b) ☐ M est une matrice diagonale
    (c) ☐ M est une matrice symétrique
    (d) ☑ M est nulle

12. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Si on calcule AB avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cela revient à opérer sur A :

    (a) ☑ $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$
    (b) ☐ $C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2$
    (c) ☐ $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$
    (d) ☐ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$