Nombres complexes et équations différentielles

27 juin 2025

Durée : **4** heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de **3** exercices indépendants.

Exercice 1 – L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions réelles f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x + \cos(x) \tag{E}$$

A. Soit f une solution du problème.

On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

1. (a) Établir que la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$y'' + y = \cos(x). \tag{E$_1$}$$
   (b) Déterminer les solutions réelles de (E_1).
   (c) En déduire qu'il existe un réel α tel que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha\cos(x) + \frac{1}{2}x\sin(x).$$
2. (a) Établir que la fonction h est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$y'' - y = x. \tag{E$_2$}$$
   (b) Déterminer les solutions réelles de (E_2).
   (c) En déduire qu'il existe un réel β tel que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \beta \operatorname{sh}(x) - x.$$
3. Déduire des questions précédentes la fonction f.

B. Vérifier réciproquement que toutes les fonctions f obtenues sont bien des solutions de l'équation (E).

Exercice 2 – On considère l'application complexe $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z^2}{z-2\,\mathrm{i}} \end{array}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de ϕ.
2. (a) Déterminer les racines carrées de $8-6i$.
   (b) En déduire les antécédents de $1+\mathrm{i}$ par ϕ.
3. Soit $b \in \mathbb{C}$.

   Discuter, selon les valeurs de b, le nombre d'antécédents de b par ϕ.
4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points d'affixe z tels que $\phi(z) \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

Problème 3 –

Partie I : Questions préliminaires

1. Soit $t \in [0\,;\pi[$. On pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Montrer que :

$$\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}.$$

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodique. Montrer à l'aide d'un changement de variable que :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t,$$

puis en déduire que :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \int_{a}^{2\pi+a} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique. Montrer que :

$$\int_0^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t, \quad \text{puis} \quad \int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Justifier que :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to a} \mathrm{F}(x) = \int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Partie II : Deux calculs d'intégrales

On considère, pour $r \in [0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ les intégrales :

$$\mathrm{A}(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\ \mathrm{d}t.$$

5. Justifier l'existence de $\mathrm{A}(r)$ et $\mathrm{B}(r)$.
6. Calculer $\mathrm{B}(r)$.
7. Montrer que $\mathrm{A}(r) = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\ \mathrm{d}t$.
8. Soit $a \in\,]0\,;\pi[$. On pose :

$$\mathrm{I}_a(r) = \int_0^{a} \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\ \mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer, via le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, que $\mathrm{I}_a(r)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathrm{I}_a(r) = \frac{2}{r+1}\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{u^2+\alpha}{(u^2+\alpha^2)(u^2+1)}\ \mathrm{d}u,$$

   où α est une constante à exprimer en fonction de r.

(b) Déterminer deux réels A, B tels que :

$$\forall\, u \in \mathbb{R},\ \frac{u^2+\alpha}{(u^2+\alpha^2)(u^2+1)} = \frac{\mathrm{A}}{u^2+\alpha^2} + \frac{\mathrm{B}}{u^2+1}.$$

(c) En déduire que :

$$\mathrm{I}_a(r) = \frac{1}{r}\left(\arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{\alpha}\right) + \frac{a}{2}\right).$$

(d) En distinguant les cas $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$, déterminer $\lim\limits_{a \to \pi^-} \mathrm{I}_a(r)$.

(e) Conclure que :

$$\mathrm{A}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in]0;1[, \\ \dfrac{2\pi}{r} & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Partie III : Indice d'un point par rapport à un lacet

Soit $\gamma : t \longmapsto x(t) + \mathrm{i}\,y(t)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0;1])$, on appelle indice de z par rapport au lacet γ, et on note $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ l'intégrale :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,\mathrm{d}t.$$

9. Justifier que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0;1])$.
10. Dans cette question uniquement, on pose : $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi t}$ et $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ avec $\rho \neq 1$, $\varphi \in [0;2\pi]$.
    (a) Vérifier que γ et z vérifient les hypothèses précédentes et calculer $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$.
    (b) On suppose $z \neq 0$. À l'aide du changement de variable $u = -2\pi t + \varphi$, montrer que :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{r - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}} \quad \text{avec } r = \frac{1}{\rho}.$$

    (c) Montrer que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \dfrac{r}{2\pi}\Big(\mathrm{A}(r) - \mathrm{i}\,\mathrm{B}(r)\Big)$.
    (d) En déduire la valeur de $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ selon les valeurs de z.
11. On considère à présent une application γ quelconque vérifiant les hypothèses précisées au début de cette partie.

    On veut montrer dans cette question que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. On pose pour ceci :

$$\mathrm{F}(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,\mathrm{d}t\right).$$

    (a) Justifier la dérivabilité de $\mathrm{G} : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{F}(x)}{\gamma(x) - z}$ pour tout $x \in [0;1]$ et montrer que :

$$\forall\, x \in [0;1], \mathrm{G}'(x) = 0.$$

    (b) En déduire que $\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(1)$ puis que $\exp(2\,\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{Ind}_\gamma(z)) = 1$.
    (c) Conclure.