Nombres complexes et équations différentielles

Exercice 1 – L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions réelles f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x + \cos(x) \tag{E}$$

A. Soit f une solution du problème.

On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

1. (a) Établir que la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(x). \tag{E$_1$}$$

Correction : Par composée, la fonction $x \longmapsto -x$, et combinaisons linéaires de fonctions deux fois dérivables, la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R},\ g''(x) + g(x) &= \frac{f''(x) + f''(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}\\ &= \frac{f''(x) + f(-x)}{2} + \frac{f''(-x) + f(-x)}{2}\end{aligned}$$

Comme f est solution de (E), on obtient :

$$\begin{aligned}&= \frac{x + \cos(x)}{2} + \frac{-x + \cos(-x)}{2}\\ &= \cos(x).\end{aligned}$$

La fonction g est bien solution sur $\mathbb{R}$ de (E_1).

(b) Déterminer les solutions réelles de (E_1).

Correction : (E_1) est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants dont les solutions homogènes sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$y_{\mathrm{H}} : x \longmapsto \mathrm{A}\cos(x) + \mathrm{B}\sin(x), \qquad \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}.$$

Commentaires : *Lorsque vous décrivez l'équation, à ne choisir qu'un mot c'est « linéaire » le plus important. C'est de lui que découle tout le reste : la méthode et la forme des solutions.*

Comme $x \longmapsto \cos(x)$ est solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = x\left(\mathrm{C}\cos(x) + \mathrm{D}\sin(x)\right), \qquad \mathrm{C}, \mathrm{D} \in \mathbb{R}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R},\ y_p'(x) &= \mathrm{C}\cos(x) + \mathrm{D}\sin(x) + x\left(\mathrm{D}\cos(x) - \mathrm{C}\sin(x)\right)\\ y_p''(x) &= -\mathrm{C}\sin(x) + \mathrm{D}\cos(x) + \left(-\mathrm{C}\sin(x) + \mathrm{D}\cos(x)\right) + x\left(-\mathrm{C}\cos(x) - \mathrm{D}\sin(x)\right)\\ &= -2\mathrm{C}\sin(x) + 2\mathrm{D}\cos(x) - x\left(\mathrm{C}\cos(x) + \mathrm{D}\sin(x)\right)\\ y_p''(x) + y_p(x) &= 2\mathrm{D}\cos(x) - 2\mathrm{C}\sin(x)\end{aligned}$$

Comme $y_p''(x) + y_p(x) = \cos(x)$ pour tout x réel, C et D sont solutions du système :

$$\begin{cases} -2\mathrm{C} & = 0 \\ 2\mathrm{D} & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{C} & = 0 \\ \mathrm{D} & = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, une solution particulière est :

$$y_p : x \longmapsto \frac{x}{2}\sin(x).$$

Commentaires : *On a tout à fait le droit d'être malin et de lire un peu plus loin pour écrire une phrase du genre « La fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}x\sin(x)$ est clairement une solution particulière de (E) ».*

Les solutions générales de (E_1) sont donc de la forme :

$$y : x \longmapsto \mathrm{A}\cos(x) + \mathrm{B}\sin(x) + \frac{x}{2}\sin(x), \quad \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}.$$

(c) En déduire qu'il existe un réel α tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha\cos(x) + \frac{1}{2}x\sin(x).$$

Correction : Par construction, g est une fonction paire donc $\mathrm{B} = 0$ et le résultat demandé.

2. (a) Établir que la fonction h est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' - y = x. \tag{E_2}$$

Correction : Le raisonnement est identique à celui de la question (1) :

La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R},\ h''(x) - h(x) &= \frac{f''(x) - f''(-x)}{2} - \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &= \frac{f''(x) + f(-x)}{2} - \frac{f''(-x) + f(-x)}{2} \end{aligned}$$

Comme f est solution de (E), on obtient :

$$\begin{aligned} &= \frac{x + \cos(x)}{2} - \frac{-x + \cos(-x)}{2} \\ &= x. \end{aligned}$$

La fonction h est bien solution sur $\mathbb{R}$ de (E_2).

(b) Déterminer les solutions réelles de (E_2).

Correction : (E_2) est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants dont les solutions homogènes sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$y_{\mathrm{H}} : x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{B}\,\mathrm{sh}\,(x), \quad \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que $y_p : x \longmapsto -x$ est une solution particulière de (E_2).

Les solutions générales de (E_1) sont donc de la forme :

$$y : x \longmapsto \mathrm{A}\,\mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{B}\,\mathrm{sh}\,(x) - x, \quad \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}.$$

(c) En déduire qu'il existe un réel β tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \beta \mathrm{sh}\,(x) - x.$$

Correction : Par construction, h est une fonction impaire donc $\mathrm{A} = 0$ et le résultat demandé.

3. Déduire des questions précédentes la fonction f.

Correction : En remarquant que $f = g + h$, on a :

$$f : x \longmapsto \alpha \cos(x) + \frac{1}{2} x \sin(x) + \beta \mathrm{sh}\,(x) - x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

B. Vérifier réciproquement que toutes les fonctions f obtenues sont bien des solutions de l'équation (E).

Correction : La fonction f sous la forme ci-dessus est clairement deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in \mathbb{R}, \\ f''(x) + f(-x) &= -\alpha \cos(x) + \cos(x) - \frac{1}{2} x \sin(x) + \beta \mathrm{sh}\,(x) + \alpha \cos(-x) - \frac{1}{2} x \sin(-x) + \beta \mathrm{sh}\,(-x) + x \\ &= x + \cos(x). \end{aligned}$$

Les fonctions f obtenues sont bien des solutions de l'équation (E).

Exercice 2 – On considère l'application complexe $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z^2}{z - 2\,\mathrm{i}} \end{array}.$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de ϕ.

Correction : $\phi(z)$ est défini si, et seulement si $z - 2\,\mathrm{i} \neq 0$ *i.e.* $z \neq 2\,\mathrm{i}$.

L'ensemble de définition de ϕ est donc $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{2\,\mathrm{i}\}$.

2. (a) Déterminer les racines carrées de $8 - 6\,\mathrm{i}$.

Correction : Posons $z = x + \mathrm{i}\, y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z^2 = 8 - 6i &\iff x^2 - y^2 + 2\,\mathrm{i}\,xy = 8 - 6\,\mathrm{i} \text{ et } |z|^2 = |8 - 6\,\mathrm{i}\,| \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \\ xy < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Les racines carrées de $8 - 6\,\mathrm{i}$ sont donc $3 - \mathrm{i}$ et $-3 + \mathrm{i}$.

(b) En déduire les antécédents de $1 + \mathrm{i}$ par ϕ.

Correction : Déterminons les antécédents de $1 + \mathrm{i}$:

$$\begin{aligned} \forall\, z \in \mathcal{D}, \quad \phi(z) = 1 + \mathrm{i} &\iff \frac{z^2}{z - 2\,\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i} \\ &\iff z^2 = (1 + \mathrm{i}\,)(z - 2\,\mathrm{i}\,) \text{ car } z \neq 2\,\mathrm{i} \\ &\iff z^2 - (1 + \mathrm{i}\,)z + (-2 + 2\,\mathrm{i}\,) = 0 \quad (\mathrm{E}_1) \end{aligned}$$

(E_1) est une équation du second degré de discriminant : $\Delta_1 = 8 - 6\,\mathrm{i} = (3 - \mathrm{i}\,)^2$.

(E_1) admet deux solutions distinctes : $\dfrac{(1 + \mathrm{i}\,) - (3 - \mathrm{i}\,)}{2} = -1 + \mathrm{i}$ et $\dfrac{(1 + \mathrm{i}\,) + (3 - \mathrm{i}\,)}{2} = 2$.

Par conséquent, $1 + \mathrm{i}$ admet deux antécédents par ϕ : $-1 + \mathrm{i}$ et 2.

Commentaires : $\overline{z - 2\,\mathrm{i}} = overline z + 2\,\mathrm{i} \neq z + 2\,\mathrm{i}$ *!!!!*

3. Soit $b \in \mathbb{C}$.

   Discuter, selon les valeurs de b, le nombre d'antécédents de b par ϕ.

Correction : Soit $b \in \mathbb{C}$. La démarche est identique à celle de la question précédente.

$$\begin{aligned} \forall\, z \in \mathcal{D}, \quad \phi(z) = b &\iff \frac{z^2}{z - 2\,\mathrm{i}} = b \\ &\iff z^2 = b(z - 2\,\mathrm{i}\,) \text{ car } z \neq 2\,\mathrm{i} \\ &\iff z^2 - bz + 2\,\mathrm{i}\,b = 0 \quad (\mathrm{E}_2) \end{aligned}$$

(E_2) est une équation du second degré de discriminant : $\Delta_2 = b^2 - 4(2\,\mathrm{i}\,b) = b(b - 8i)$. Conclusion,

- Si $b \in \{0, 8\,\mathrm{i}\,\}$, $\Delta_2 = 0$, donc b admet un seul antécédent par ϕ.
- Si $b \in \mathbb{C} \setminus \{0, 8\,\mathrm{i}\,\}$, $\Delta_2 \neq 0$, donc b admet deux antécédents distincts par ϕ.

4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points d'affixe z tels que $\phi(z) \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$.

Correction : Soit $z \in \mathcal{D}$ *i.e.* $z \neq 2\,\mathrm{i}$ et $\overline{z} \neq -2\,\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}
\phi(z) \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} &\iff \phi(z) = -\overline{\phi(z)} \iff \frac{z^2}{z-2\,\mathrm{i}} = -\frac{\overline{z}^2}{\overline{z}+2\,\mathrm{i}} \\
&\iff z^2(\overline{z}+2\,\mathrm{i}) + \overline{z}^2(z-2\,\mathrm{i}) = 0 \\
&\iff z\,|z|^2 + 2\,\mathrm{i}\,z^2 + \overline{z}\,|z|^2 - 2\,\mathrm{i}\,\overline{z}^2 = 0 \\
&\iff (z+\overline{z})\,|z|^2 + 2\,\mathrm{i}\,(z^2-\overline{z}^2) = 0 \\
&\iff (z+\overline{z})\,|z|^2 + 2\,\mathrm{i}\,(z-\overline{z})\,(z+\overline{z}) = 0 \\
&\iff (z+\overline{z})\,(z\overline{z} + 2\,\mathrm{i}\,z - 2\,\mathrm{i}\,\overline{z}) = 0 \\
&\iff (z+\overline{z})\left((z-2\,\mathrm{i})\,\overline{(z-2\,\mathrm{i})} - 4\right) = 0 \\
&\iff z+\overline{z} = 0 \ \text{ ou } \ |z-2\,\mathrm{i}| = 2.
\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc l'ensemble des points de l'axe des imaginaires purs et du cercle de centre $\Omega(2\,\mathrm{i})$ et de rayon 2.

On vérifiera que le point d'affixe $2\,\mathrm{i}$ ne fait pas partie de cet ensemble.

Commentaires : *On pouvait aussi trouver $\mathcal{E}$ en passant par la forme algébrique mais c'est moins joli : Soit $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathrm{D}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned}
\phi(z) = \frac{z^2}{z-2\,\mathrm{i}} = \frac{(x+iy)^2}{x+\mathrm{i}\,(y-2)} &= \frac{[(x^2-y^2)+2\,\mathrm{i}\,xy][x-\mathrm{i}\,(y-2)]}{[x+\mathrm{i}\,(y-2)][x-\mathrm{i}\,(y-2)]} \\
&= \frac{[(x^2-y^2)x+2xy(y-2)] + \mathrm{i}\,[2x^2y-(x^2-y^2)(y-2)]}{x^2+(y-2)^2} \\
&= \frac{[(x^2+y^2-4y)x] + \mathrm{i}\,[2x^2y-(x^2-y^2)(y-2)]}{x^2+(y-2)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(z) \in \mathcal{E} &\iff \phi(z) \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \\
&\iff \mathrm{Re}\,(\phi(z)) = 0 \\
&\iff \frac{(x^2+y^2-4y)x}{x^2+(y-2)^2} = 0 \\
&\iff (x^2+y^2-4y)x = 0 \ \textit{et} \ x^2+(y-2)^2 \neq 0 \\
&\iff [x^2+y^2-4y = 0 \ \textit{ou} \ x = 0] \ \textit{et} \ (x,y) \neq (0,2) \\
&\iff [x^2+(y-2)^2 = 2^2 \ \textit{ou} \ x = 0] \ \textit{et} \ (x,y) \neq (0,2)
\end{aligned}$$

On retrouve le même ensemble.

Problème 3 –

Partie I : Questions préliminaires

1. Soit $t \in [0\,;\pi[$. On pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Montrer que :

$$\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Correction : Pour $t \in [0\,;\pi[$, $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ est bien défini et, avec $1+u^2 \neq 0$, on a :

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}}{1 + \dfrac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \cos(t)$$

et

$$\sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{t}{2}\right)\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Commentaires : *C'est quand même bien de parler de la bonne définition de u !*

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodique. Montrer à l'aide d'un changement de variable que :

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t,$$

puis en déduire que :

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \int_{a}^{2\pi+a} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Correction : Soit $a \in \mathbb{R}$. On fait le changement de variable $\mathscr{C}^1$: $u = t - 2\pi$ *i.e.* $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, ce qui donne :

$$\int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^a f(u+2\pi)\ \mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\ \mathrm{d}u = \int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t.$$

On a alors, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_a^{2\pi+a} f(t)\,dt &= \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(t)\,dt \\ &= \underbrace{\int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt}_{=0} + \int_0^{2\pi} f(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(t)\,dt.\end{aligned}$$

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique. Montrer que :

$$\int_0^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^0 f(t)\ \mathrm{d}t, \quad \text{puis} \quad \int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Correction : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique. En effectuant le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$: $u = -t$ *i.e.* $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, on obtient :

$$\int_0^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^{-\pi} f(-u)\ \mathrm{d}u = \int_{-\pi}^0 f(u)\ \mathrm{d}u = \int_{-\pi}^0 f(t)\ \mathrm{d}t.$$

De plus, à l'aide de la question précédente pour $a=-\pi$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t\\ &= \int_{-\pi}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{(relation de Chasles)}\\ &= 2\int_0^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{(résultat précédent).}\end{aligned}$$

4. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Justifier que :

$$\forall\, a\in\mathbb{R},\quad \lim_{x\to a}\mathrm{F}(x)=\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Correction : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $a\in\mathbb{R}$, elle l'est donc sur tout intervalle $[0\,;a]$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ est correctement définie.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue et en particulier en $a\in\mathbb{R}$:

$$\forall\, a\in\mathbb{R},\ \lim_{x\to a}\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(a)$$

ce qui s'écrit :

$$\forall\, a\in\mathbb{R}, \lim_{x\to a}\mathrm{F}(x)=\int_0^a f(t)\,dt.$$

Partie II : Deux calculs d'intégrales

On considère, pour $r\in[0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ les intégrales :

$$\mathrm{A}(r)=\int_0^{2\pi}\frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(r)=\int_0^{2\pi}\frac{\sin(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\ \mathrm{d}t.$$

5. Justifier l'existence de $\mathrm{A}(r)$ et $\mathrm{B}(r)$.

Correction : Soit $r\in[0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$. On considère l'application $t\longmapsto\dfrac{1}{r^2-2r\cos(t)+1}$ définie sur $[0\,;2\pi]$.

On constate que le dénominateur ne s'annule pas.
En effet, ce dernier a pour discriminant $\Delta=-4\sin^2(t)$, ce qui est toujours strictement négatif sauf pour $t=0$, π ou 2π.

— Or si $t=0$ ou 2π, alors l'expression s'annule pour $r=1$ ce qui est impossible avec $r\in[0\,;1[$.
— De même, si $t=\pi$, alors l'expression s'annule pour $r=-1$ ce qui est également impossible.

Au final, le dénominateur ne s'annulant pas sur $[0\,;2\pi]$, l'application considérée est continue sur $[0\,;2\pi]$, et il en est de même, d'après les théorèmes sur les produits de fonctions continues des deux applications $t\longmapsto\dfrac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}$ ainsi que $t\longmapsto\dfrac{\sin(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}$.

Commentaires : *C'est bien la non nullité du dénominateur qu'il fallait montrer.*

Encore trop d'élèves oublient de préciser que le dénominateur et le numérateurs sont continues.

Ces deux dernières étant continues, $\mathrm{A}(r)$ et $\mathrm{B}(r)$ sont bien définies.

6. Calculer $\mathrm{B}(r)$.

Correction :

— Si $r \neq 0$, alors

$$\mathrm{B}(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2r}\int_0^{2\pi} \frac{2r\sin(t)}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2r}\Big[\ln(u(t))\Big]_0^{2\pi} = 0$$

car $u(0) = u(2\pi)$.

— Si $r = 0$, alors $\mathrm{B}(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_0^{2\pi} = 0$.

Donc, $\forall\, r \in [0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, $\mathrm{B}(r) = 0$.

7. Montrer que $\mathrm{A}(r) = 2\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}\,\mathrm{d}t$.

Correction : Comme $t \longmapsto \dfrac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique sur cet ensemble invariant par translations, d'après la question (3) , on en déduit :

$$\mathrm{A}(r) = 2\int_0^{\pi} \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}\,\mathrm{d}t.$$

8. Soit $a \in\,]0\,;\pi[$. On pose :

$$\mathrm{I}_a(r) = \int_0^{a} \frac{r - \cos(t)}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer, via le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$, que $\mathrm{I}_a(r)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathrm{I}_a(r) = \frac{2}{r+1}\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{u^2 + \alpha}{(u^2 + \alpha^2)(u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u,$$

où α est une constante à exprimer en fonction de r.

Correction : On effectue le changement de variable $\mathscr{C}^1$: $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

Avec,

$$\cos(t) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}t = \frac{2}{1 + u^2}\,\mathrm{d}u,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_a(r) &= 2\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{r(1+u^2)-(1-u^2)}{r^2(1+u^2)-2r(1-u^2)+(1+u^2)}\,\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{(r+1)u^2+(r-1)}{u^2(r+1)^2+(r-1)^2}\,\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{r+1}\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{u^2+\alpha}{(u^2+\alpha^2)(u^2+1)}\,\mathrm{d}u \quad \text{avec } \alpha=\frac{r-1}{r+1}.
\end{aligned}$$

(α est bien définie car $r+1\neq 0$.)

(b) Déterminer deux réels A,B tels que :

$$\forall\, u\in\mathbb{R},\ \frac{u^2+\alpha}{(u^2+\alpha^2)(u^2+1)} = \frac{\mathrm{A}}{u^2+\alpha^2}+\frac{\mathrm{B}}{u^2+1}.$$

Correction : En réduisant au même dénominateur et en identifiant, on trouve :

$$\mathrm{A}=\frac{\alpha}{\alpha+1} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}=\frac{1}{\alpha+1}.$$

Commentaires : *Ce n'est pas une décomposition en éléments simples mais juste une réécriture plus pratique pour l'intégration qui suit.*

On pouvait aussi trouver A et B en résolvant un système :

- *En multipliant les deux expressions par u^2 et en prenant la limite en $+\infty$: $1=\mathrm{A}+\mathrm{B}$.*
- *Pour $u=0$: $\frac{1}{\alpha}=\frac{\mathrm{A}}{\alpha^2}+\mathrm{B}$.*

Le couple $(\mathrm{A}\,;\mathrm{B})$ est alors solution du système $\begin{cases} \mathrm{A}+\mathrm{B} &= 1 \\ \frac{1}{\alpha^2}\,\mathrm{A}+\mathrm{B} &= \frac{1}{\alpha}.\end{cases}$

On trouve, bien sûr, le même couple solution.

(c) En déduire que :

$$\mathrm{I}_a(r)=\frac{1}{r}\left(\arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{\alpha}\right)+\frac{a}{2}\right).$$

Correction : Cette décomposition nous ramène à des termes facilement intégrables :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_a(r) &= \frac{2}{r+1}\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{u^2+\alpha}{(u^2+\alpha^2)(u^2+1)}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{(r+1)(\alpha+1)}\left(\int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{\alpha}{u^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\tan\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\right) \\
&= \frac{2}{(r+1)(\alpha+1)}\left(\arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{\alpha}\right)+\arctan\left(\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Comme $a\in\,]0\,;\pi[$, $\arctan\left(\tan\left(\frac{a}{2}\right)\right)=\frac{a}{2}$.

De plus, en remarquant que $\alpha + 1 = \dfrac{2r}{r+1}$, on déduit :

$$\mathrm{I}_a(r) = \frac{1}{r}\left(\arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{\alpha}\right) + \frac{a}{2}\right).$$

(d) En distinguant les cas $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$, déterminer $\lim\limits_{a\to\pi^-} \mathrm{I}_a(r)$.

Correction :

— Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{a\to\pi^-} \arctan\left(\dfrac{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{\alpha}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{a\to\pi^-} \mathrm{I}_a(r) = 0$.

— Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{a\to\pi^-} \arctan\left(\dfrac{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{\alpha}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{a\to\pi^-} \mathrm{I}_a(r) = \dfrac{\pi}{r}$.

(e) Conclure que :

$$\mathrm{A}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in]0;1[, \\ \dfrac{2\pi}{r} & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Correction : D'une part, comme $r \in [0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, on a :

$$\alpha = \frac{r-1}{r+1} < 0 \iff -1 < r < 1 \iff r \in [0\,;1[\,.$$

D'autre part, l'application $t \longmapsto \dfrac{r-\cos(t)}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après la question (4), on a :

$$\lim_{a\to\pi^-} \int_0^a \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{A}(r).$$

Enfin, avec le résultat de la question (8d) on obtient :

$$\mathrm{A}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in \,]0\,;1[\\ \dfrac{2\pi}{r} & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Partie III : Indice d'un point par rapport à un lacet

Soit $\gamma : t \longmapsto x(t) + \mathrm{i}\,y(t)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0;1])$, on appelle indice de z par rapport au lacet γ, et on note $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ l'intégrale :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,\mathrm{d}t.$$

9. Justifier que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0;1])$.

Correction : Puisque γ est de classe $\mathscr{C}^1$, γ' est continue sur $[0\,;1]$.

De même, $t \longmapsto \gamma(t) - z$ est continue car γ est dérivable donc continue.

Par ailleurs : $\forall\, t \in [0\,;1]\,, \gamma(t) \neq z$ (sinon $z \in \gamma([0;1])$, ce qui contredirait l'hypothèse).

Par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, on en déduit que $t \longmapsto \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$ est continue sur $[0\,;1]$, donc l'intégrale est définie, ce qui justifie l'existence de $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$.

10. Dans cette question uniquement, on pose : $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi t}$ et $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ avec $\rho \neq 1$, $\varphi \in [0; 2\pi]$.
    (a) Vérifier que γ et z vérifient les hypothèses précédentes et calculer $\operatorname{Ind}_\gamma(0)$.

Correction : La fonction γ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ et $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$.

D'autre part, comme $\forall\, t \in [0\,;1]\,, |\gamma(t)| = 1$ et $|z| = \rho \neq 1$, alors $z \notin \gamma([0\,;1])$.

Les hypothèses sont donc bien vérifiées.

Puisque : $\forall\, t \in [0;1], \gamma'(t) = 2\,\mathrm{i}\,\pi\gamma(t)$, on a :

$$\operatorname{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_0^1 2\,\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{d}t = 1.$$

Commentaires : *γ est à valeurs complexes donc pas de $\ln(\gamma)$ ou trucs du genre.*

    (b) On suppose $z \neq 0$. À l'aide du changement de variable $u = -2\pi t + \varphi$, montrer que :

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{r - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}} \quad \text{avec } r = \frac{1}{\rho}.$$

Correction : Soit $z \neq 0$. Par définition :

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi t}}{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi t} - z}\,\mathrm{d}t.$$

On remplace z par $\dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ en posant $r = \dfrac{1}{\rho}$ car $\rho = |z| \neq 0$.

On a alors :

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi t}}{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi t} - \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}}\,\mathrm{d}t = r\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi t}}{r\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}}\,\mathrm{d}t.$$

Posons $u = -2\pi t + \varphi$. On a donc $\mathrm{d}u = -2\pi\,\mathrm{d}t$ i.e. $\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{d}u$ et les bornes deviennent $u(0) = \varphi$, $u(1) = \varphi - 2\pi$. Par changement de variable $\mathscr{C}^1$,

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi}\int_{\varphi-2\pi}^{\varphi} \frac{\mathrm{d}u}{r - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,u}}.$$

La fonction $u \longmapsto \dfrac{1}{r - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,u}}$ est 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{C}$ donc, d'après la question (2) , on obtient :

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{r - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}.$$

Nombres complexes et équations différentielles

(c) Montrer que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \dfrac{r}{2\pi}\Big(\mathrm{A}(r) - \mathrm{i}\,\mathrm{B}(r)\Big)$.

Correction : Il suffit de trouver la forme algébrique de $\dfrac{1}{r-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} &= \frac{r-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{(r-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})(r-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})}\\ &= \frac{r-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{r^2-2r\cos(t)+1} = \frac{r-\cos(t)}{r^2-2r\cos(t)+1} - \frac{\sin(t)}{r^2-2r\cos(t)+1}\,\mathrm{i}\,.\end{aligned}$$

On en déduit, par linéarité :

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{r}{2\pi}\Big(\mathrm{A}(r) - \mathrm{i}\,\mathrm{B}(r)\Big).$$

(d) En déduire la valeur de $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ selon les valeurs de z.

Correction : Comme $\mathrm{B}(r) = 0$ d'après la question (6) , et $\mathrm{A}(r) = \begin{cases} 0 \text{ si } r \in]0;1[, \\ \mathrm{A}(r) = \dfrac{2\pi}{r} \text{ si } r > 1 \end{cases}$ d'après la question (8e)

Avec $|z| = \dfrac{1}{r}$, on obtient :

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| < 1, \\ 0 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

11. On considère à présent une application γ quelconque vérifiant les hypothèses précisées au début de cette partie.

On veut montrer dans cette question que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. On pose pour ceci :

$$\mathrm{F}(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,\mathrm{d}t\right).$$

(a) Justifier la dérivabilité de $\mathrm{G} : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{F}(x)}{\gamma(x)-z}$ pour tout $x \in [0\,;1]$ et montrer que :

$$\forall\, x \in [0\,;1]\,, \mathrm{G}'(x) = 0.$$

Correction : D'après le théorème fondamental de l'analyse et par composition, F est dérivable sur $[0;1]$ et :

$$\forall\, x \in [0;1],\ \mathrm{F}'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z}\mathrm{F}(x) \qquad \Big(\iff \mathrm{F}'(x)(\gamma(x)-z) - \mathrm{F}(x)\gamma'(x) = 0\Big).$$

Alors, par quotient de dénominateur non nul, G est dérivable sur $[0;1]$ et on a :

$$\forall\, x \in [0;1],\ \mathrm{G}'(x) = \frac{\mathrm{F}'(x)(\gamma(x)-z) - \mathrm{F}(x)\gamma'(x)}{(\gamma(x)-z)^2}.$$

D'après le résultat précédent, le numérateur est toujours nul et donc :

$$\forall\, x \in [0;1],\ \mathrm{G}'(x) = 0.$$

(b) En déduire que $\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(1)$ puis que $\exp(2\,\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{Ind}_\gamma(z)) = 1$.

Correction : D'après la question précédente, G est constante sur $[0\,;1]$.

En particulier, on a $\mathrm{G}(0) = \mathrm{G}(1)$.

Comme $\gamma(0) = \gamma(1)$, on trouve donc $\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(1)$, c'est-à-dire :

$$\exp\left(\int_0^0 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,\mathrm{d}t\right) = \exp\left(\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,\mathrm{d}t\right) \iff 1 = \exp\left(2\,\mathrm{i}\,\pi \mathrm{Ind}_\gamma(z)\right).$$

(c) Conclure.

Correction : Comme $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2\,\mathrm{i}\,\pi k$, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\,\mathrm{i}\,\pi \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 2\,\mathrm{i}\,\pi k$ *i.e.* $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = k$ car $2\,\mathrm{i}\,\pi \neq 0$.

On a donc finalement :

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0;1]),\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}.$$

Commentaires : *En mathématiques, l'indice d'un point par rapport à un lacet γ est intuitivement le nombre de tours (dans le sens trigonométrique) réalisé par le lacet autour du point. Intuitivement, placez-vous sur le point d'affixe z et parcourez le lacet (qui est fermé) du regard dans le sens trigonométrique jusqu'à revenir au point initial. Le nombre de tours sur vous-même que vous aurez faits est votre indice par rapport au lacet.*

L'indice fournit le lien entre les aspects purement analytiques en analyse complexe et les propriétés topologiques du plan complexe.