Suite et série d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

Dans ce devoir, on pourra utiliser, sans le démontrer, que la fonction $t \longmapsto t\sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Justifier que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.

3. Établir que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{3}(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1})$.

   Indications : on pourra intégrer par parties en primitivant $t \longmapsto \sqrt{t}$ et utiliser le fait que $t = 1-(1-t)$.

4. Montrer que suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

5. Démontrer que $\forall\ \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

6. Conclure quant à la limite de (I_n).

7. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n. Préciser alors la valeur de I_2.

On se propose à présent d'exprimer de deux façons différentes I_n en fonction de n.

On pose $u_n = \dfrac{(2n+3)!}{n!(n+1)!}\mathrm{I}_n$.

8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

9. En déduire une expression de I_n en fonction de n.

10. Établir que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+3}$. Retrouver la valeur de I_2.

11. Calculer la somme $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{I}_k}{k}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n$.