Suite et série d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

Dans ce devoir, on pourra utiliser, sans le démontrer, que la fonction $t \longmapsto t\sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Calculer I_0 et I_1.

Correction : Tout d'abord,

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\left[t\sqrt{t}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Pour calculer I_1, comme $t \longmapsto 1-t$ et $t \longmapsto \dfrac{2}{3}t\sqrt{t}$ son de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$, un intégration par parties s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 &= \int_0^1 (1-t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{2}{3}(1-t)t\sqrt{t}\right]_0^1}_{=\,0} - \frac{2}{3}\int_0^1 (-1)t\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{15}.\end{aligned}$$

Commentaires : *On pouvait aussi directement primitiver, car $t \longmapsto (1-t)\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}$ admet pour primitive $t \longmapsto \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}$.*

2. Justifier que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $t \longmapsto (1-t)^n\sqrt{t}$ est positive sur $[0\,;1]$, donc par **positivité de l'intégrale**, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Ainsi, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.

3. Établir que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{3}(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1})$.

   Indications : on pourra intégrer par parties en primitivant $t \longmapsto \sqrt{t}$ et utiliser le fait que $t = 1-(1-t)$.

Correction : Les fonctions $t \longmapsto (1-t)^{n+1}$ et $t \longmapsto \frac{2}{3}t\sqrt{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+1} &= \int_0^1 (1-t)^{n+1}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{2}{3}(1-t)^{n+1}t\sqrt{t}\right]_0^1}_{=\,0} + \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 (1-t)^n\,t\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 (1-(1-t))(1-t)^n\sqrt{t}\,\mathrm{d}t && (t = 1-(1-t)) \\
&= \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 \left((1-t)^n - (1-t)^{n+1}\right)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}(n+1)\left(\int_0^1 (1-t)^n\sqrt{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)^{n+1}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\right) && \text{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{2(n+1)}{3}(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1}).
\end{aligned}$$

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.

4. Montrer que suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après ce qui précède, on a $\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{3}{2(n+1)}\mathrm{I}_{n+1} \geqslant 0$ donc la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Minorée par 0, elle converge d'après le théorème de convergence monotone (vers une limite positive).

5. Démontrer que $\forall \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Correction : Il suffit de majorer l'intégrande sur $[0\,;1]$ et d'utiliser la croissance de l'intégrale :

Pour tout $t \in [0\,;1]$, $\sqrt{t} \leqslant 1$ donc $(1-t)^n\sqrt{t} \leqslant (1-t)^n$ puis

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \int_0^1 (1-t)^n\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

On a donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

6. Conclure quant à la limite de (I_n).

Correction : Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

7. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n. Préciser alors la valeur de I_2.

Correction : D'après (3), $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{3}(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1}) \\
\left(1 + \frac{2(n+1)}{3}\right)\mathrm{I}_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{3}\mathrm{I}_n \\
\frac{2n+5}{3}\mathrm{I}_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{3}\mathrm{I}_n \\
\mathrm{I}_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2n+5}\mathrm{I}_n.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{I}_2 = \frac{4}{7}\mathrm{I}_1 = \frac{4}{7} \times \frac{4}{15} = \frac{16}{105}$.

On se propose à présent d'exprimer de deux façons différentes I_n en fonction de n.

On pose $u_n = \dfrac{(2n+3)!}{n!(n+1)!}\mathrm{I}_n$.

8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Correction : Montrons tout d'abord que I_n donc u_n est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Soit par une petite récurrence rapide à partir de la relation précédente $\mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{2n+5}\mathrm{I}_n$ et $\mathrm{I}_0 = \dfrac{2}{3} \neq 0$.

(b) Soit avec l'intégrale en remarquant que $t \longmapsto (1-t)^n\sqrt{t}$ ne prend que des valeurs strictement positives exceptées en les points isolés 0 et 1. On évoque ensuite la stricte positivité de l'intégrale.

On peut dorénavant calculer le quotient pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\dfrac{(2n+5)!}{(n+1)!(n+2)!}}{\dfrac{(2n+3)!}{n!(n+1)!}}\frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n} \\
&= \frac{\cancel{(2n+5)}\,(2n+4)}{\cancel{(n+1)}\,(n+2)}\,\frac{2\,\cancel{(n+1)}}{\cancel{2n+5}} \\
&= \frac{4\,\cancel{(n+2)}}{\cancel{n+2}} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 3!\mathrm{I}_0 = 4$.

Commentaires : *Ne jamais former le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$! À moins d'avoir montré au préalable que u_n, et donc I_n, n'est jamais nul.*

9. En déduire une expression de I_n en fonction de n.

Correction : D'après la question précédente, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 4^{n+1}$.

Finalement :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = 4^{n+1}\,\frac{n!(n+1)!}{(2n+3)!}.$$

10. Établir que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+3}$. Retrouver la valeur de I_2.

Correction : Il suffit de développer le binôme de Newton et d'utiliser la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = (1-t)^n\sqrt{t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t)^k\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1 t^{k+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t && \text{(linéarité de l'intégrale)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\left[\frac{t^{k+\frac{3}{2}}}{k+\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{k+\frac{3}{2}}\\
&= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+3}.
\end{aligned}$$

Retrouvons la valeur de I_2 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2 &= 2\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\frac{(-1)^k}{2k+3} = 2\left(\binom{2}{0}\frac{(-1)^0}{3}+\binom{2}{1}\frac{(-1)^1}{5}+\binom{2}{2}\frac{(-1)^2}{7}\right)\\
&= 2\left[\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right] = \frac{16}{105},
\end{aligned}$$

ce qui est bien la même valeur que celle trouvée précédemment.

11. Calculer la somme $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{I}_k}{k}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}_n$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après (3), on a :

$$\begin{aligned}
\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \mathrm{I}_k &= \frac{2k}{3}(\mathrm{I}_{k-1}-\mathrm{I}_k)\\
\frac{\mathrm{I}_k}{k} &= \frac{2}{3}(\mathrm{I}_{k-1}-\mathrm{I}_k).
\end{aligned}$$

En sommant ces égalités pour k variant entre 1 et n, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{I}_k}{k} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{I}_{k-1}-\mathrm{I}_k)\\
&= \frac{2}{3}(\mathrm{I}_0-\mathrm{I}_n).
\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n = 0$, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}_n = \frac{2}{3}\mathrm{I}_0 = \frac{4}{9}.$$