Suites I

1. Que signifie dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ ?

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

2. Donner un exemple d'une suite convergente vers 1 non monotone.

$$1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

3. Donner la forme explicite de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 2 comme point fixe.

La suite définie par $v_n = u_n - 2$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = -3$.

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = -3 \times 3^n + 2 = -3^{n+1} + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$ est majorée par 2.

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n+3}{n+2} \leqslant \dfrac{2n+4}{n+2} = 2.$

5. On considère les suites $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$ donc $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

6. Sans la convexité, montrer que, $\forall\, x \in\,]-1\,;+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

La fonction $\varphi : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall\, x \in\,]-1\,;+\infty[\,,\ \varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}.$$

La fonction φ admet donc un maximum en 0 qui vaut $\varphi(0) = 0$.

On en déduit $\forall\, x \in\,]-1\,;+\infty[,\ \varphi(x) \leqslant 0$ *i.e.* $\ln(1+x) \leqslant x$.

7. Démontrer que toute suite convergeant vers un réel ℓ strictement positif est minorée par un réel m strictement positif à partir d'un certain rang.

   Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et prenons $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$.

   Il existe alors un rang $n_0(\varepsilon)$ au delà duquel $-\dfrac{\ell}{2} \leqslant u_n - \ell \leqslant \dfrac{\ell}{2} \implies 0 < \dfrac{\ell}{2} \leqslant u_n$.

   Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certains rang par un réel strictement positif.

Suites I

1. Que signifie dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$?

$$\forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, n_o(A) \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_o \implies u_n \geqslant A.$$

2. Donner un exemple d'une suite divergente vers $+\infty$ non monotone.

$$n + (-1)^n.$$

3. Donner la forme explicite de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 5 comme point fixe.

   La suite définie par $v_n = u_n - 5$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -4$.

   Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = -4 \times 2^n + 5 = -2^{n+2} + 5$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\sqrt{1+n^2}}{n}$ et minorée par 1, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\sqrt{1+n^2}}{n} \geqslant \dfrac{\sqrt{n^2}}{n} = 1.$

5. On considère les suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

   Montrer que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $T_{n+1} - T_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{(n+1)(n+1)} - \dfrac{1}{\underbrace{n(n+1)}_{\leqslant (n+1)(n+1)}} \leqslant 0$ donc $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

6. Sans la convexité, montrer que, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x + 1$.

   La fonction $\varphi : x \longmapsto e^x - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = e^x - 1.$$

   La fonction φ admet donc un minimum en 0 qui vaut $\varphi(0) = 0$.

   On en déduit $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geqslant 0$ *i.e.* $e^x \geqslant x + 1$.

7. Démontrer que toute suite divergeant vers $+\infty$ est minorée par un réel m strictement positif à partir d'un certain rang.

   Soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et prenons $\mathrm{A} = 1$ dans la définition de la divergence :

   Il existe alors un rang $n_0(\mathrm{A})$ au delà duquel $u_n \geqslant 1 > 0$.

   Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certains rang par un réel strictement positif.