Chapitre

XV Fonctions de la variable réelle - LIMITES

La notion de limite est un concept central en analyse. Elle intervient dès que l'on étudie les suites ou les fonctions. Elle est indispensable pour définir la dérivée ou la continuité. Plus tard, la limite se mue en topologie et se fait plus générale, plus abstraite.

Dire qu'une quantité « admet une limite » est quelque chose de très intuitif. Tellement intuitif que les mathématiciens n'avaient pas ressenti pendant plusieurs siècles le besoin de définir précisément ce dont il s'agissait.

Ce n'est qu'au XIXèmesiècle que Weierstrass, à la suite de travaux d'Euler et des siens sur des fonctions continues nulle part dérivables, en donne une définition correcte.

Avant de passer à des considérations plus terre à terre, voici comment le célèbre mathématicien du XXème siècle Ian Stewart [1] voit la définition : « f admet ℓ comme limite en a » :

« C'est un peu un jeu ... Le joueur Epsilon indique quel écart maximum il accepte entre $f(x)$ et ℓ (c'est-à-dire qu'il impose $|f(x)-\ell|<\varepsilon$, où $\varepsilon>0$ est choisi par lui).

Le joueur Delta essaie de faire ce qu'il faut pour le satisfaire (c'est-à-dire qu'il essaie de trouver $\delta>0$ tel que, si l'écart entre x et a est inférieur à δ, alors $|f(x)-\ell|<\varepsilon$).

Si, quel que soit le choix d'Epsilon, le joueur Delta a toujours une stratégie gagnante, alors $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a ».

[1]. Ian Stewart FRS, né en **1945** en Angleterre, est professeur de mathématiques à l'université de Warwick au Royaume-Uni. Il a publié plus de 140 publications scientifiques.

CONTENU

Dans tout ce chapitre, on considère une fonction définie sur un sous-ensemble quelconque D de $\mathbb{R}$:

$$f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}.$$

I/ Limites

Il est difficile de parler proprement de limites sans connaître un peu de topologie qui n'est pas au programme de PTSI. Essayons !

Considérons l'intervalle ouvert $]0\,;1[$. L'intuition doit vous convaincre que tout élément $x \in\,]0\,;1[$ peut être enchâssé dans un intervalle ouvert de la forme $]x-r\,;x+r[$ qui, à condition de choisir r « assez petit », est lui-même inclus tout entier dans $]0\,;1[$.

On dit alors que $]x-r\,;x+r[$ est un *voisinage de x*. C'est cette propriété de $]0\,;1[$ d'être voisin de chacun de ses points qui fait dire de lui qu'il est *ouvert*.

Ce n'est pas le cas de l'intervalle $[0\,;1]$. En effet, pour $x=1$, il est tout à fait impossible de trouver un voisinage $]1-r\,;1+r[$ inclus tout entier dans $[0\,;1]$.

A contrario, son complémentaire dans $\mathbb{R}$, la réunion des deux intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]1\,;+\infty[$ l'est. On dit alors que $[0\,;1]$ est *fermé*.

En ce sens, l'intervalle $]-\infty\,;2]$ est fermé car son complémentaire (dans $\mathbb{R}$), $]-\infty\,;2[$ est ouvert.

I.1 Point adhérent

Lorsque l'on étudie la limite d'une fonction f définie sur un ensemble D en un point a *i.e.* lorsque « x tend a », il est sous-entendu que $x \neq a$ mais aussi que a peut être ainsi approché par des points de D.

Autrement dit et intuitivement, a ne peut pas être « trop loin » de D : « intérieur » à D ou « au bord de » de D.

Plus précisément,

Définition 1 (Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$) : (Hors-Programme)
Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Point intérieur : Soit $x \in \mathbb{R}$.

On dit que x est *intérieur* à A si A contient un voisinage de x :

$$\exists\, \mathrm{V}_x \in \mathcal{V}(x), \mathrm{V}_x \subset \mathrm{A}.$$

On note $\mathring{\mathrm{A}}$ leur ensemble.

Point adhérent : Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que x est *adhérent* à A si A rencontre tout voisinage de x :

$$\forall\ \mathrm{V}_x \in \mathcal{V}(x),\ \mathrm{A} \cap \mathrm{V}_x \neq \emptyset.$$

On note $\overline{\mathrm{A}}$ leur ensemble.

Un point intérieur à une partie y est aussi adhérent. La réciproque est fausse.

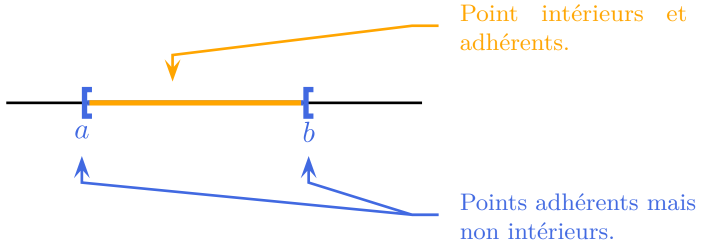


Figure XV.1 – Points intérieurs et adhérents à un intervalle $[a\,;b[$.

Exemples 1 :

— 1 est adhérent à $[0\,;1[$ et $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}_+^*$.

— Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors $\mathring{\overline{[a\,;b[}} =]a\,;b[$ et $\overline{[a\,;b[} = [a\,;b]$.

D'une manière générale, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\overline{\mathrm{I}}$ est l'intervalle fermé correspondant dans $\overline{\mathbb{R}}$ en incluant les bornes finies et $\mathring{\mathrm{I}}$ l'intervalle ouvert excluant les bornes.

I	$\mathring{\mathrm{I}}$	$\overline{\mathrm{I}}$
$]1\,;2] \cup [3\,;4]$	$]1\,;2[\cup]3\,;4[$	$[1\,;2] \cup [3\,;4]$
$]1\,;+\infty[$	$]1\,;+\infty[$	$[1\,;+\infty[$
$]-\infty\,;2[$	$]-\infty\,;2[$	$]-\infty\,;2]$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

En particulier, $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

— Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. Alors,
  — a et b sont adhérents à $[a\,;b[$.
  — $\forall\, x \in \mathbb{R}$ tel que $a < x < b$ est à la fois intérieur et adhérent à $[a\,;b[$.

Il existe une caractérisation des points adhérents fort pratique.

Proposition 1 (Caractérisation séquentielle) :
Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

x est adhérent à A si, et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Preuve : On montre successivement les deux implications :

$(\Longrightarrow)$ **:** On suppose que x est adhérent à A.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme x est adhérent à A, tout voisinage $V_{x,n} = \left]x - \dfrac{1}{n+1}\,;x + \dfrac{1}{n+1}\right[$ rencontre A *i.e.* $\exists\, a_n \in V_{x,n} \cap A$.

Par construction, $|x - a_n| < \dfrac{1}{n+1}$ *i.e.* la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers x.

$(\Longleftarrow)$ **:** Considérons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et un voisinage $V_x =]x-\varepsilon\,;x+\varepsilon[$ quelconque de x.

Par définition de la convergence, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de A convergeant vers x, il existe un rang à partir duquel $|x - a_n| < \varepsilon \iff a_n \in V_x$ et $A \cap V_x \neq \emptyset$.

Corollaire 1.1 :
Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

$$\sup(A) \in \overline{A} \qquad \text{et} \qquad \inf(A) \in \overline{A}.$$

En particulier, on pourra toujours trouver une suite d'éléments de A convergeant vers $\sup(A)$. De même pour $\inf(A)$.

Preuve : On ne démontre ce résultat que pour $\sup(A)$, la démonstration étant identique pour $\inf(A)$.

Par définition de la borne supérieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup(A) - \dfrac{1}{n+1}$ n'est pas un majorant de A donc il existe $x_n \in A$ tel que :

$$\sup(A) - \frac{1}{n+1} < x_n \leqslant \sup(A).$$

Par construction, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A converge vers $\sup(A)$ et $\sup(A) \in \overline{A}$.

I.2 Limites

En reprenant les voisinage définis précédemment, on peut adopter une définition uniforme, globale et équivalente à celle que vous connaissiez de la notion de limites :

Définition 2 (Définition topologique des limites) : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet une *limite* b lorsque x tend vers a si, et seulement si

$$\forall\ \mathrm{V} \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \mathrm{U_V} \in \mathcal{V}(a)\ /\ \forall\, x \in \mathrm{U_V} \cap \mathrm{D} \implies f(x) \in \mathrm{V}.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Dans le cadre de la définition (2) , on pourra, selon les besoins, visualiser un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ sous la forme $\mathcal{B}\,(a\,;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}\ /\ |x-a| < \varepsilon\}$ ou $]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$.

On remarquera que $|x-a| < \varepsilon$ équivaut à $x \in \mathcal{B}\,(a\,;\varepsilon)$.

On passe alors du cas topologique au cas normé en remarquant que tout voisinage de a contient une boule $\mathcal{B}\,(a\,;\alpha)$, et du cas normé au cas topologique en remarquant qu'une boule $\mathcal{B}\,(a\,;\alpha)$ est un voisinage de a.

On pourra également mélanger les deux points de vue. Ainsi, la définition (2) s'écrira aussi de manière équivalente :

(i) $\forall\, \mathrm{V} \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| < \alpha \implies f(x) \in \mathrm{V}$.

(ii) $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \mathrm{U}_\varepsilon \in \mathcal{V}(a),\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in \mathrm{U}_\varepsilon \implies |f(x)-b| < \varepsilon$.

Remarque : Les inégalités sont indifféremment strictes ou larges pour définir des voisinages ouverts ou fermés excepté $\varepsilon > 0$. Le programme demande d'utiliser des inégalités larges ce que j'essaierai.

Preuve : Il suffit de constater que

$$\mathcal{B}_f\,(a\,;\tfrac{\alpha}{2}) \subset \mathcal{B}_o\,(a\,;\alpha) \subset \mathcal{B}_f\,(a\,;\alpha)$$

et,

$$\mathcal{B}_f\,(b\,;\tfrac{\varepsilon}{2}) \subset \mathcal{B}_o\,(b\,;\varepsilon) \subset \mathcal{B}_f\,(b\,;\varepsilon)\,.$$

On retrouve alors tous les cas déjà connus :

Proposition 2 (Limites en $+\infty$) :
Soient D tel que $+\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies |f(x)-b| \leqslant \varepsilon$.

— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}$.

— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\, \mathrm{B} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{B}) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \geqslant \alpha \implies f(x) \leqslant \mathrm{B}$.

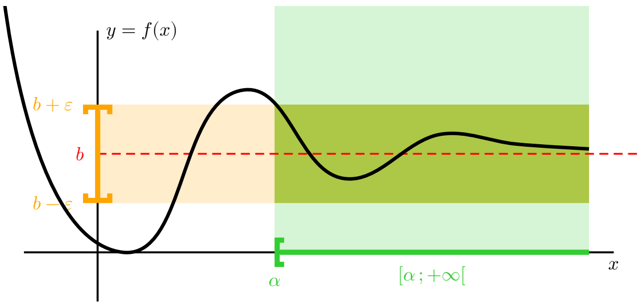


Figure XV.2 – Limite finie en l'infini.

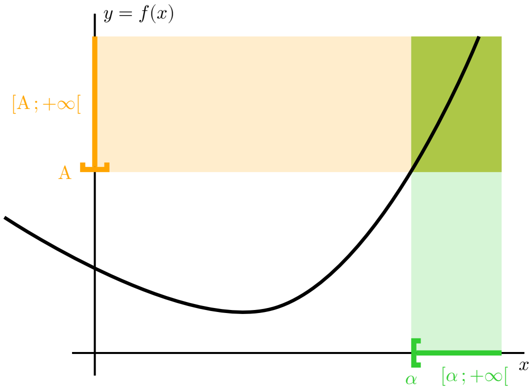


Figure XV.3 – Limite infinie à l'infini.

Décortiquons l'expression dans le cas d'une limite finie :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in [\alpha\,;+\infty[\ \Longrightarrow\ |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$$

— $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$: « Quelle que soit la marge d'erreur ε qu'on se donne, aussi petite soit-elle ... ».
— $\exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}$: « ...il existe un seuil α ... ».
— $\forall\, x \in \mathrm{D}$, : $x \in [\alpha\,;+\infty[$ ... : « ...tel que si x est à la fois dans D et au-delà de α *i.e.* dans un voisinage de $+\infty$ ... ».
— ... $\Longrightarrow |f(x) - b| \leqslant \varepsilon$: alors $f(x)$ est proche de b à ε près ».

Autrement dit : « Si $x \in \mathrm{D}$ est suffisamment grand, alors $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de b ».

Exercice 1 : À l'aide de la définition, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Correction :

1. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et posons $\alpha = \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

   Alors, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \geqslant \alpha \implies 0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \varepsilon$.

   Donc, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$. Si $\mathrm{A} \leqslant 0$, tout α convient.

   Sinon, en posant $\alpha = \sqrt{\mathrm{A}}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant \alpha \implies \mathrm{A} \leqslant x^2$.

   Donc, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

De manière analogue, en $-\infty$:

Proposition 3 (Limites en $-\infty$) :
Soient D tel que $-\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

— $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
— $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \beta(\mathrm{A}) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$

— $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall\, \mathrm{B} \in \mathbb{R},\ \exists\, \beta(\mathrm{B}) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \implies f(x) \leqslant \mathrm{B}.$

$f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
$\underset{n\neq 0}{x^n}$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair
$\underset{n\neq 0}{\dfrac{1}{x^n}}$	0	0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	non défini
$\ln(x)$	$+\infty$	non défini
e^x	$+\infty$	0
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	0	non défini
$\sin(x)$ $\cos(x)$ $\tan(x)$	pas de limite	pas de limite
$\arctan(x)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2}$
$\mathrm{ch}\,(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\mathrm{sh}\,(x)$	$+\infty$	$-\infty$

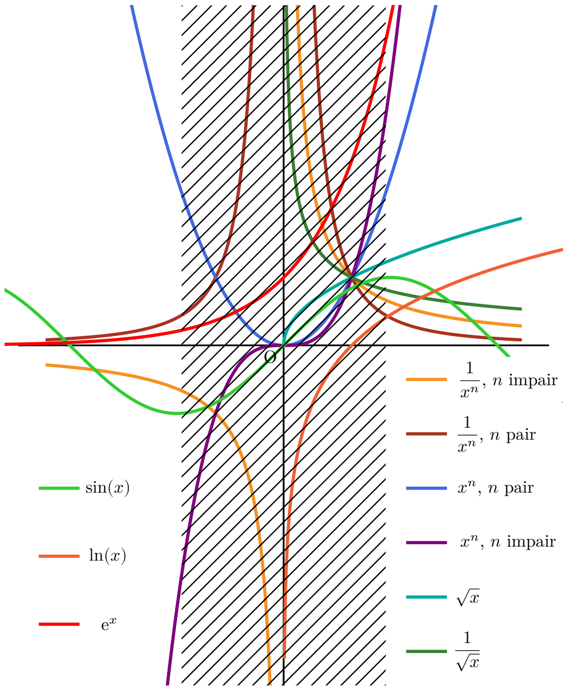


Figure XV.4 – Limites des fonctions de référence en l'infini.

Remarque : Toutes les fonctions n'ont pas nécessairement une limite en l'infini. C'est le cas, notamment des fonctions circulaires cos, sin ou tan mais aussi de la fonction

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor. \end{array}$$

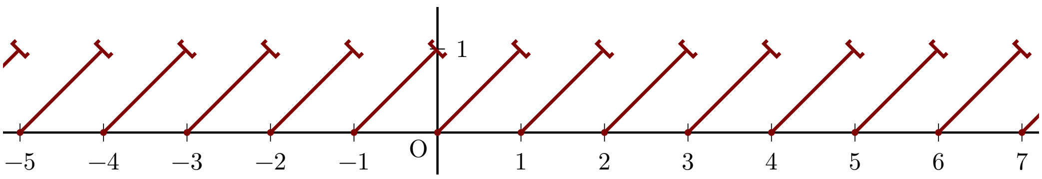


Figure XV.5 – La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ n'a pas de limite en $\pm\infty$.

Exercice 2 : Déterminer les limites (si elles existent) en $\pm\infty$ des fonctions suivantes :

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{5x^3 - x}$ $\qquad f_2 : x \longmapsto \cos(x) - x$ $\qquad f_3 : x \longmapsto x^2 e^{-x} - x$

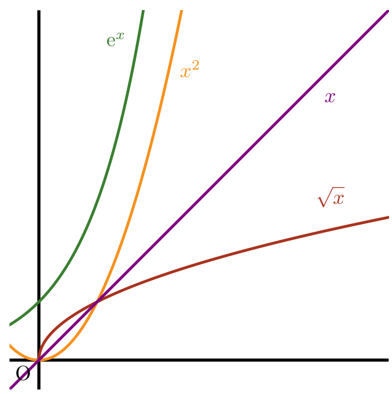
Correction : Rapidement,

1. Factorisation par les termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{5x} = 0.$
2. Minoration et théorème de comparaison : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -1 - x \leqslant f - 2(x) \leqslant 1 - x$ qui entraîne :
$$\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = \lim_{x \to -\infty} -1 - x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f_2(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty.$$
3. En $-\infty$, le théorème sur les limites de produits et de sommes suffit à conclure :
$$\lim_{x \to -\infty} f_3(x) = +\infty.$$
En $+\infty$, on utilise les théorèmes sur les croissances comparées et les limites de sommes :
$$\lim_{x \to +\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f_3(x) = -\infty.$$

Remarque : Une fonction peut tendre vers $+\infty$ en $+\infty$ de plusieurs façons. On parle de vitesse de divergence différentes.

C'est le cas par exemple des fonctions suivantes :

— $x \longmapsto x^2$ tend « rapidement » vers l'infini. La concavité est tournée vers le haut.
— $x \longmapsto x$ tend « moyennement » vers l'infini. Pas de concavité
— $x \longmapsto \sqrt{x}$ tend « lentement » vers l'infini. La concavité est tournée vers le bas.
— $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ tend vers l'infini « incommensurablement plus vite » que les fonctions précédentes.



Ces simples informations sont importantes puisqu'elles nous permettront de conjecturer certaines limites. Une fonction rapide sera prépondérante sur une fonction lente en l'infini donc pourra y imposer sa limite.

`Soient` α, β, γ `des réels strictement positifs.`

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{\ln^\gamma(x)} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\beta\, |\ln(x)|^\gamma = 0.$$

Figure XV.6 – Croissances comparées.

Proposition 4 (Limite en un point fini) :
Soient $a \in \overline{\mathrm{D}} \cap \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

— $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x - a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
— $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x - a| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$
— $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \forall\, \mathrm{B} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{B}) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x - a| \leqslant \alpha \implies f(x) \leqslant \mathrm{B}.$

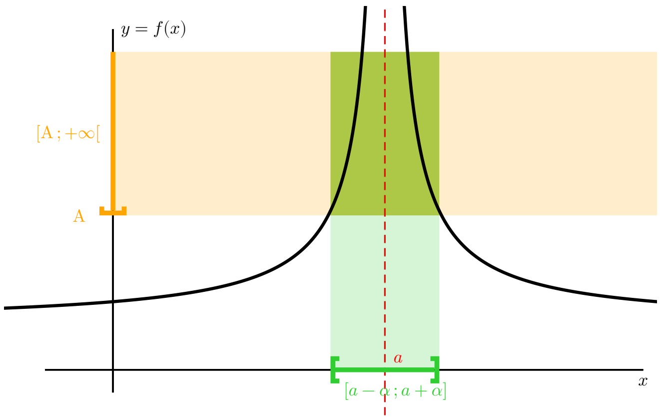


Figure XV.7 – Limite infinie en un point fini

Remarques :

— L'hypothèse $a \in \overline{D}$ est nécessaire pour pouvoir considérer des points aussi proches que l'on veut de a.

On dira que la limite de f est envisageable en a si cette hypothèse est satisfaite (sans considération d'existence ou non de la limite), et qu'elle ne l'est pas si $a \notin \overline{D}$.

— Dans le cas fini, l'inégalité est d'autant plus contraignante que ε est petit. On peut alors se contenter d'étudier le cas de valeurs de ε inférieures à une valeur ε_0 donnée.

— De même, dans le cas d'une limite ∞, la définition trouve sa pertinence lorsque A devient grand ou petit (vers $-\infty$) mais il n'est pas nécessaire de le supposer strictement positif ou négatif.

$f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$
$\dfrac{1}{x^n}$ $_{n\neq 0}$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$+\infty$	non défini
$\ln(x)$	$-\infty$	non défini

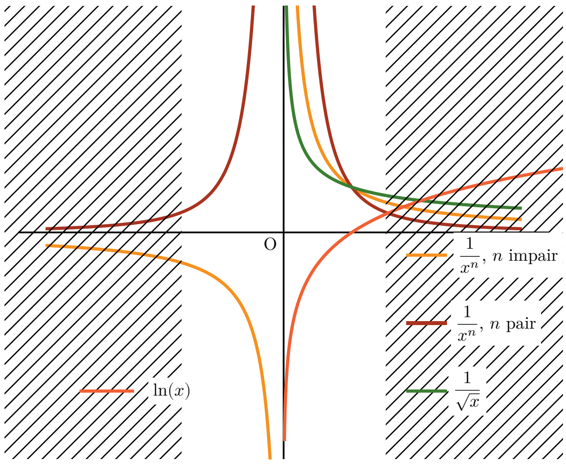


Figure XV.8 – Limites des fonctions de référence en 0.

$$\left.\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{x}\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x)}{x}\end{array}\right\}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Figure XV.9 – Taux d'accroissement de fonctions dérivables.

Exercice 3 : Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes en 0. On distinguera éventuellement 0^- et 0^+.

$f_1 : x \longmapsto x-\ln(x)$

$f_2 : x \longmapsto x\sqrt{1+(\ln(x))^2}$

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{5x}-\mathrm{e}^{3x}}{x}$

$f_4 : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Correction :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-\ln(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(x)=-\infty.$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\sqrt{1+(\ln(x))^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x^2+\underbrace{(x\ln(x))}_{\to 0}{}^2}=0$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{5x}-\mathrm{e}^{3x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{5x}-1}{x}-\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-1}{x}=\left(\mathrm{e}^{5x}\right)'(0)-\left(\mathrm{e}^{3x}\right)'(0)=5-3=2$ en reconnaissant les taux d'accroissement en 0 de deux fonctions dérivables.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^u}{u}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$ d'après les théorèmes sur les limites de composées et de produits.

Corollaire 4.1 (Limite et valeur absolue) :
Soient $a\in\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $f : \mathrm{D}\longmapsto\mathbb{K}$ et $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x\to a}f(x)=\ell \implies \lim_{x\to a}|f(x)|=|\ell|\,.$$

Preuve : Dans le cas $\ell\in\mathbb{R}$, tout découle de l'inégalité triangulaire :

$$\big|\,|f(x)|-|\ell|\,\big|\leqslant|f(x)-\ell|\,.$$

Dans le cas $\ell=\pm\infty$, tout découle de la définition de la valeur absolue :

$$|f(x)|=\max\left\{f(x),-f(x)\right\}.$$

L'unicité de la limite d'une fonction provient d'une propriété topologique de $\mathbb{R}$: la séparation.

Théorème 5 (Unicité de la limite, cas réel) :
Soit $a \in \overline{\mathrm{D}}$ et f une fonction réelle.

Si elle existe, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est unique.

Par la contraposée, une fonction admettant deux valeurs d'adhérence au voisinage d'un point a ne peut y avoir de limite.

Preuve : Posons ℓ et ℓ' les deux limites de f en a et supposons $\ell \neq \ell'$.

Il existe donc deux voisinages disjoints $\mathcal{V}_\ell$ et $\mathcal{V}_{\ell'}$ tels que $\ell \in \mathcal{V}_\ell$, $\ell' \in \mathcal{V}_{\ell'}$ et $\mathcal{V}_\ell \cap \mathcal{V}_{\ell'} = \emptyset$.

Appliquons alors la définition de la limite de f en a :

— Il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,\mathcal{V}_\ell}$ de a (dépendant de $\mathcal{V}_\ell$) tel que

$$x \in \mathcal{V}_{a,\mathcal{V}_\ell} \implies f(x) \in \mathcal{V}_\ell.$$

— Il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,\mathcal{V}_{\ell'}}$ de a (dépendant de $\mathcal{V}_{\ell'}$) tel que

$$x \in \mathcal{V}_{a,\mathcal{V}_{\ell'}} \implies f(x) \in \mathcal{V}_{\ell'}.$$

Il suffit alors de considérer $x \in \mathcal{V}_{a,\mathcal{V}_\ell} \cap \mathcal{V}_{a,\mathcal{V}_{\ell'}}$ pour avoir la contradiction.

Notation : En cas d'existence de la limite en a, le théorème (5) permet de justifier la notation, maintenant non ambigüe, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ de LA limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

ATTENTION

Certaines fonctions peuvent ne pas avoir de limite en un point.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

En 0, $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right) = \pm\infty$. Comme la limite de $\sin(x)$ en l'infini n'existe pas, celle de $f(x)$ en 0 n'existe pas non plus. Nous verrons dans un autre chapitre une manière efficace et rigoureuse de montrer ce point.

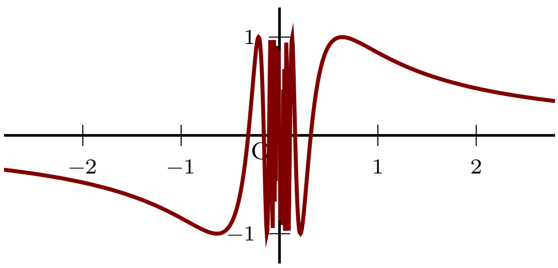


Figure XV.10 – La fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

I.3 La limite contrôle la fonction

Proposition 6 :
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, D un voisinage de a et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Par la contraposée, toute fonction non bornée sur un voisinage de a ne peut avoir de limite finie.

Preuve : Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de f en a.

Par définition, il existe une voisinage $\mathcal{V}_{a,1}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,1} \implies |f(x) - \ell| \leqslant 1.$$

i.e. $\forall\, x \in \mathcal{V}_{a,1}$, $\ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$. La fonction f est bornée dans un voisinage de a.

On a mieux que la proposition (6) :

Théorème 7 :
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $m < \ell$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $m < f(x)$.
2. Si $\ell < \mathrm{M}$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x) < \mathrm{M}$.

Preuve :

1. Soient $m < \ell$ et $\varepsilon = \dfrac{\ell - m}{2} > 0$.

   Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, $\forall\, x \in \mathrm{D}$,

$$\begin{aligned} |x - a| < \eta &\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon \implies \ell - \varepsilon < f(x) \\ &\implies \ell - \frac{\ell - m}{2} < f(x) \implies \frac{\ell + m}{2} < f(x) \\ &\implies m < f(x). \end{aligned}$$

2. Le cas $\ell < \mathrm{M}$ est identique.

Un cas particulier TRÈS important est le cas où $\ell > 0$ ou $\ell \neq 0$, le théorème (7) nous assure de l'existence d'un voisinage de a sur lequel $f(x) > 0$ ou $f(x) \neq 0$ *i.e.* il existe un voisinage de a sur lequel, f prend des valeurs du même signe que sa limite.

I.4 Limites à droite et à gauche

Tout d'abord, que se passe-t-il en un point où la fonction est définie ?

Proposition 8 :
Si f est définie en $a \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}$ et y admet une limite, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Une fonction ne peut donc pas avoir de limite infinie en un point où elle est définie.

ATTENTION La proposition (8) ne dit absolument pas que toute fonction définie en a est continue en a mais seulement qu'une condition nécessaire à l'être est que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.

Preuve : Faisons l'hypothèse que f est définie en a intérieur à D et y possède une limite ℓ.

Pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe alors un voisinage V_a de a inclus dans D pour lequel $f(x) \in \mathrm{V}_\ell$ pour tout $x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{V}_a$.

Comme a appartient nécessairement à tout voisinage de a, $f(a)$ appartient à tout voisinage de ℓ.

On en déduit déjà que $\ell \in \mathbb{R}$ car $]f(a)\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;f(a)[$ sont des voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ respectivement ne contenant pas $f(a)$ donc à écarter.

Enfin, la condition « $f(a)$ appartient à TOUT voisinage de ℓ » implique que $\ell = f(a)$. (Imaginez des voisinages aussi réduits que l'on veux !)

Conclusion, une fonction admet une limite en un point (intérieur) de D si, et seulement si elle y est continue. [2]

Il y a donc peu de problèmes en un point intérieur mais que se passe-t-il alors aux bornes de celui-ci ? Une fonction peut y être définie mais ne pas y avoir de limite.

C'est, par exemple, le cas de la fonction partie entière en $a = 1$ où la fonction, pourtant correctement définie, prend des valeurs différentes suivant « le côté » d'où l'on arrive.

On parlera alors de *limite à droite* ou de *limite à gauche*.

Soit J un intervalle (ou une réunion d'intervalles, ou plus généralement un sous-ensemble quelconque) tel que $a \in \overline{\mathrm{D} \cap \mathrm{J}}$. Si la limite (finie ou infinie) en a de la restriction $f_{|\mathrm{D}\cap\mathrm{J}}$ existe, on utilise la notation suivante :

$$\lim_{x\to a} f_{|\mathrm{D}\cap\mathrm{J}}(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in\mathrm{J}}} f(x).$$

Définition 3 (Limites à droite et à gauche) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

Limite à gauche : Si a est adhérent à $\mathrm{D} \cap]-\infty\,;a[$, on dit que f possède une *limite à gauche* en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]-\infty;a[}$ possède une limite en a.

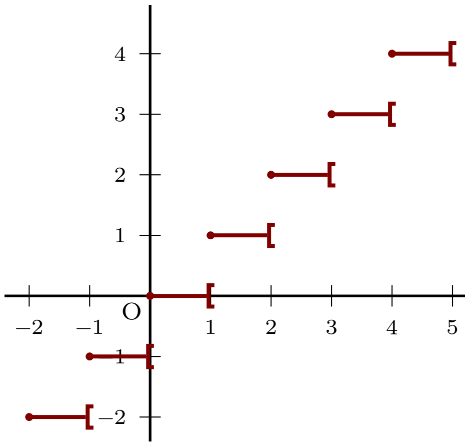
Cette limite est notée $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in]-\infty;a[}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ ou encore $f(a-0)$.

[2]. En un point de l'intérieur de D et non de $\overline{\mathrm{D}}$ je le redis.

Limite à droite : Si a est adhérent à $\mathrm{D} \cap]a\,;+\infty[$, on dit que f possède une *limite à droite* en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]a;+\infty[}$ possède une limite en a.

Cette limite est notée $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in]a;+\infty[}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $f(a+0)$.

Remarque : a n'appartient ni à $\mathrm{D} \cap]-\infty\,;a[$ ni à $\mathrm{D} \cap]a\,;+\infty[$. Il y est seulement adhérent.



$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{\substack{x\to n\\ x<n}} \lfloor x \rfloor = n-1$$

et

$$\lim_{\substack{x\to n\\ x>n}} \lfloor x \rfloor = n.$$

Figure XV.11 – La fonction partie entière n'a pas de limites en tout point de $\mathbb{Z}$ mais seulement des limites à droite et à gauche.

Remarque : De même que plus haut, on peut dire que la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in \mathrm{J}}} f(x)$ est envisageable ou non suivant que a appartient à $\overline{\mathrm{D}\cap \mathrm{J}}$ ou pas.

Ici la définition topologique atteint ses limites et on doit utiliser une définition métrique ou au moins partiellement :

Corollaire 8.1 :
Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

— Dire que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}_b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad \underset{\text{ou } x\in[a-\alpha\,;a[}{a-\alpha \leqslant x < a} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

— Dire que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}_b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad \underset{\text{ou } x\in]a\,;a+\alpha]}{a < x \leqslant a+\alpha} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

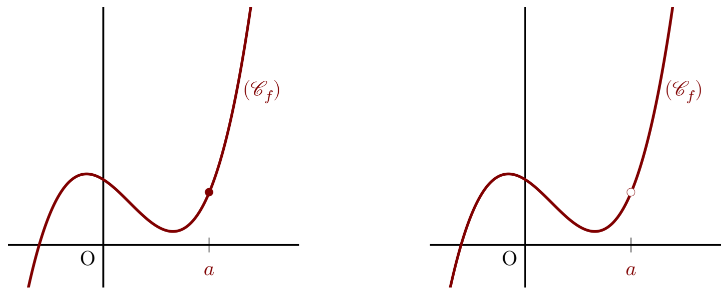
Les limites à gauche/à droite ne sont jamais que des limites au sens initial du chapitre mais appliquées à des restrictions. Cela justifie qu'elles auront les mêmes propriétés notamment leur unicité. Plus particulièrement, le théorème (5), la proposition (6) le théorème (7) sont vrais pour des limites à droite ou à gauche. Et, généralement, tous les théorèmes qui suivront, sauf mention contraire ou explicite seront également vrais dans ces cas.

Théorème 9 (Limite et limites à gauche et à droite) :
Soit $a \in \overline{\mathbb{D}}$.

La fonction f admet une limite en a notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si, et seulement si

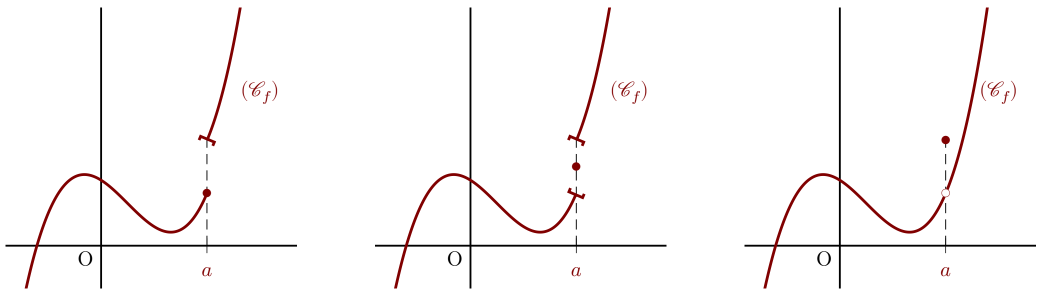
1. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ si f est définie en a.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ si f n'est pas définie en a.

En particulier, dans tous les cas, une condition nécessaire est que les quantités $f(a-0)$ et $f(a+0)$ existent et soient égales.



f est définie en a. f n'est pas définie en a

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe



$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ n'existe pas

Figure XV.12 – Caractérisation de la limite en fonction des ses limites à gauche et à droite.

Exemple 2 :

— La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ a pour limite $+\infty$ en 0 [3].

— La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

— Soit δ_0, la fonction qui, à tout réel associe 1 si $x = 0$ et 0 sinon.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \delta_0 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \delta_0 = 0$ mais δ_0 n'a pas de limite en 0 car $\delta_0(0) = 1$.

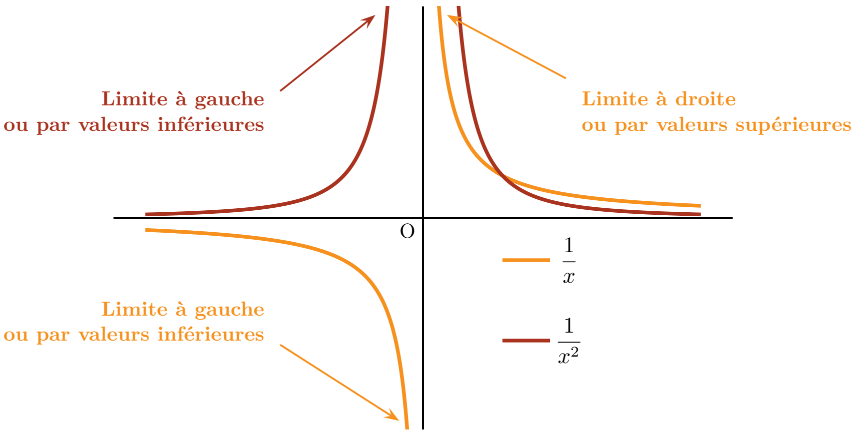


Figure XV.13 – Limites à droite et à gauche d'une fonction

Exemples 3 : Étudions les limites de $\dfrac{1}{2-x}$ et $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ dans un voisinage de 2 :

Comme $\lim\limits_{x\to 2} 2-x = 0$, on est ramené à l'étude de $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{1}{u}$ qui dépend du signe de u :

1. On commence par dresser un tableau de signes de $x-2$:[4]

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

Avec les conventions de notations :

$$\lim_{x\to 2^-} 2-x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^+} 2-x = 0^-.$$

2. On conclut :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 2^-} 2-x & = & 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty,$$

et

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 2^+} 2-x & = & 0^- \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} & = & -\infty \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty.$$

Ici, malgré la difficulté apparente, $\lim\limits_{x\to 2^-} (2-x)^2 = \lim\limits_{x\to 2^+} (2-x)^2 = \lim\limits_{x\to 2} (2-x)^2 = 0^+$.

D'où :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 2} (2-x)^2 & = & 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2} \frac{1}{(2-x)^2} = +\infty.$$

En conclusion, on remarquera bien que si $\dfrac{1}{2-x}$ n'a pas de limite en 2, $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ en a bien une qui est $+\infty$.

Exemples 4 :

[3]. Car la même limite infinie à droite et à gauche.
[4]. Au moins dans sa tête !

— La fonction partie entière à des limites à droite et à gauche distinctes pour tout a $\in \mathbb{Z}$ et n'admet donc pas de limite en ces points.

— La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en 0 mais y admet une limite :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1.$$

— La fonction sinus cardinal $g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie en 0 et y admet une limite :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1.$$

Remarque : Cette propriété nous permettra au chapitre suivant de définir correctement le prolongement par continuité d'une fonction admettant une limite finie aux bornes de son intervalle de définition.

— La fonction $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie en 0, admet une limite à droite et une limite à gauche en 0 mais n'admet pas de limite en 0.

Exercice 4 : Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2}$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$
4. $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$
7. $\lim_{x\to 0} \lfloor x \rfloor$
8. $\lim_{x\to 0} \lfloor x^2 \rfloor$

Correction :

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$
2. $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ n'existe pas.
3. $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty.$
4. $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0 \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$ donc $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ n'existe pas.
5. $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x}{|x|} = -1 \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x}{|x|} = 1$ donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ n'existe pas.
6. $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x^2}{|x|} = 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x^2}{|x|}$ donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|} = 0.$
7. $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \lfloor x \rfloor = -1 \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \lfloor x \rfloor = 0$ donc $\lim_{x\to 0} \lfloor x \rfloor$ n'existe pas.
8. $\lim_{x\to 0} \lfloor x^2 \rfloor = \lim_{\substack{u\to 0\\ x>0}} \lfloor u \rfloor = 0.$

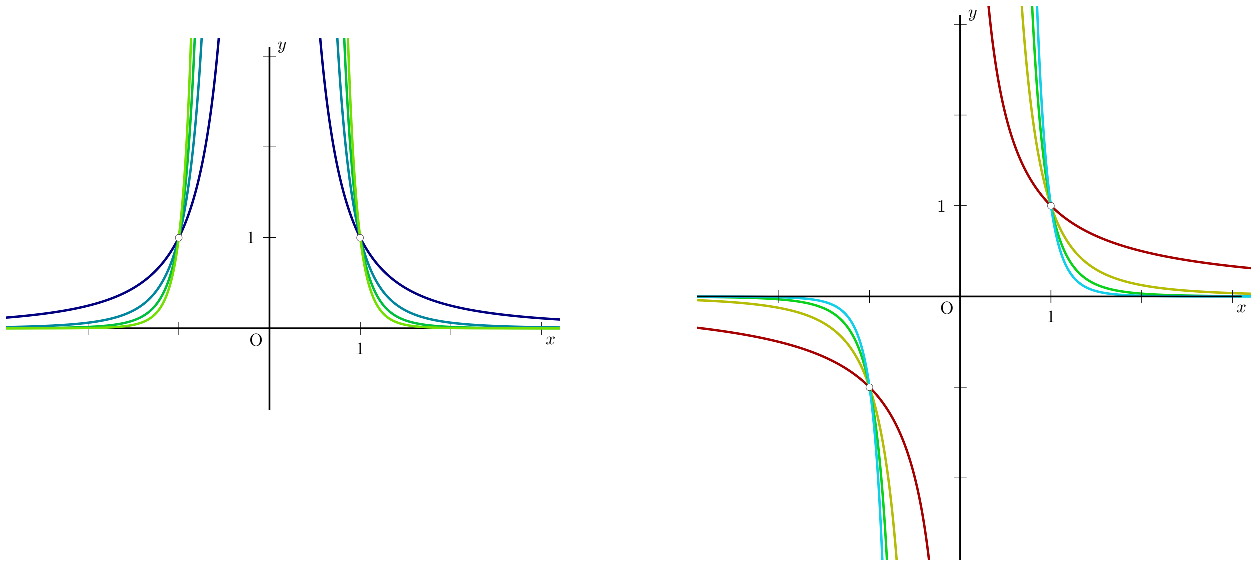
I.5 Asymptote

Le comportement à l'infini, dit *comportement asymptotique*, peut aussi aider à cerner l'allure de la courbe.

On définit pour cela la notion de droite asymptote [5] : il s'agit d'une droite qui approche d'aussi près que l'on veut une portion de la courbe lorsque l'on s'éloigne vers l'infini dans l'une des deux directions. Plus précisément :

Définition 4 (Asymptote) : On dit qu'une fonction f admet :

1. une *asymptote verticale* au voisinage de a d'équation $x = a$ lorsque $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$.
2. une *asymptote horizontale* au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = b$ lorsque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.
3. plus généralement, une droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax + b$, dite *asymptote oblique*, au voisinage de $\pm\infty$ lorsque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.



$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n = 2, 4, 6, 8$.

$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n = 1, 3, 5, 7$.

Figure XV.14 – Les courbes des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale et l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

On remarquera que l'existence de la limite n'est pas nécessaire pour que la courbe admette une asymptote verticale comme c'est le cas pour $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour n impair.

Méthode 1 (Déterminer une droite asymptote (non verticale)) :
Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

1. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$:

[5]. De l'étymologie grecque construit à l'aide du préfixe privatif « a » et de « symptôsis » (rencontre) : la droite qui ne se rencontre pas.

Remarque : L'utilisation du terme asymptote ne se limite pas aux droites. On parlera bientôt de courbes asymptotes.

— Si cette limite n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.

Dans le cas infini, on dit alors que la courbe admet une *branche parabolique* de direction $(\mathrm{O}y)$.

— Si cette limite est finie, de valeur a, on dit que la droite $y = ax$ est direction asymptotique de la courbe en $+\infty$.

2. On étudie la limite de $f(x) - ax$:

— Si elle n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.

Dans le cas infini, on dit alors que la courbe admet une *branche parabolique* de direction $(\mathrm{O}x)$.

— Si cette limite est finie, de valeur b, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

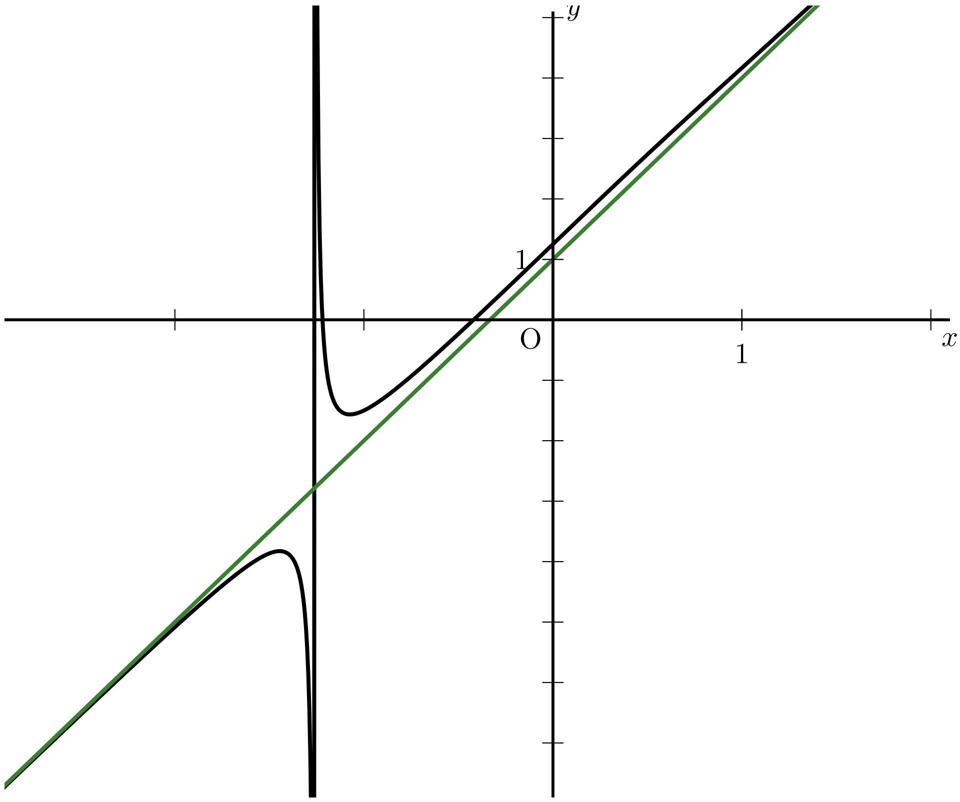


Figure XV.15 – La droite d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à la courbe de $f : x \longmapsto 3x + 1 + \dfrac{1}{2(x^3 + 2)}$.

Nous verrons plus tard comment on peut obtenir a sans former le quotient, à l'aide d'équivalents, ou même comment obtenir simultanément a et b à l'aide d'un « développement limité ».

Exercice 5 : Étudier les asymptotes éventuelles des courbes de :

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{4x^2 - 2}{2x + 1}$ $\qquad$ $f_2 : x \longmapsto \sqrt{x^2 + 3x + 1}$

Correction :

1. Par division euclidienne du numérateur par le dénominateur, on trouve :

$$\frac{4x^2-2}{2x+1} = 2x-1-\frac{1}{2x+1}.$$

Comme $\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x)-(2x-1) = -\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x+1} = 0$, on en déduit que la droite d'équation $y=2x-1$ est asymptote à la courbe de f_1 au voisinage de l'infini.

2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$ donc la courbe de f_2 admet la même direction asymptotique que la première bissectrice en $+\infty$.

De plus, $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)-x = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} 3\frac{1+\frac{1}{3x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{3}{2}.$

La courbe de f_2 admet donc la droite d'équation $y=x+\frac{3}{2}$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

En $-\infty$, le même raisonnement conduirait successivement à

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = -1.$$

Puis

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x)+x = \lim_{x\to-\infty} 3\frac{1+\frac{1}{3x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-1} = -\frac{3}{2}.$$

La droite d'équation $y=-x-\frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe de f_2 au voisinage de $-\infty$.

Exercice 6 : Montrer que la courbe de $x\longmapsto\cos(x)-x$ n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Correction : D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x)-x}{x} = -1$. La courbe admet donc comme direction asymptotique celle de $y=x$ au voisinage de $+\infty$.

Cependant $\lim_{x\to+\infty}\cos(x)$ n'existe pas donc la courbe n'admet pas d'asymptote au voisinage de l'infini.

Remarque : Dire que $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ est équivalent de dire que $\lim_{x\to\infty} f(x)-b=0$. Cette dernière expression représente, au signe près, la distance entre la courbe et son asymptote : à l'infini, la courbe représentative se rapproche infiniment de son asymptote.

Méthode 2 (Position relative d'une courbe et de son asymptote) :
Soit f une fonction et $y=ax+b$ l'équation de son asymptote horizontale ou oblique $(\mathscr{D})$.

Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $(\mathscr{D})$ en $+\infty$, il suffit d'étudier le signe de $f(x)-(ax+b)$ sur un voisinage $]\alpha\,;+\infty[$ de celui-ci.

x	α	δ	$+\infty$
Signe de $f(x)-(ax+b)$	$+$	0	$-$
Position de $\mathscr{C}_f$ et $(\mathscr{D})$	$\mathscr{C}_f$ au dessus de $(\mathscr{D})$		$\mathscr{C}_f$ au dessous de $(\mathscr{D})$

II/ Stabilité algébrique

Un peu d'histoire : *Les théorèmes qui suivent étaient jugés évidents au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Une tentative de démonstration aurait alors paru incongrue et superflue. Ces démonstrations nous sont cependant nécessaires pour plusieurs raisons :*

— *Montrer l'efficacité de notre définition de limite.*
— *Justifier la validité de notre intuition.*
— *Servir de modèle de démonstration pouvant être utilisé dans des cas plus complexes.*

Les résultats de certaines opérations sur les limites sont intuitifs et parfaitement déterminés.

D'autres opérations mènent à des formes dites « indéterminées », c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles qu'ils faudra... déterminer.

- $0\times\infty$
- $\dfrac{0}{0}$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\infty-\infty$
- 1^∞
- 0^0
- ∞^0
- 0^∞

Pour ce faire, il faudra alors user de différentes méthodes et techniques pour transformer l'écriture de la suite et « lever l'indétermination ».

Notamment, soit factoriser une somme, développer un produit, décomposer une fraction en éléments simples ou multiplier le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée, soit essayer de changer la forme de l'expression, soit utiliser le théorème de comparaison ou des gendarmes, soit le corollaire (18.1) sur les suites monotones pour pouvoir conclure [6].

ATTENTION Dans les paragraphes qui suivent, on considèrera un réel $a\in\overline{\mathbb{R}}$, deux fonctions f et g à valeurs réelles définies dans un voisinage de a et on considèrera les limites en ce point.

[6]. Dans tous les cas, réfléchir avant d'affirmer.

II.1 Limite d'une somme

Proposition 10 (Somme) :
Soient ℓ, $\ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme Indéter.

Preuve :

Cas où ℓ et ℓ' sont finies : Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire et d'écrire :

$$|f(x)+g(x)-(\ell+\ell')| \leqslant |f(x)-\ell| + |g(x)-\ell'|.$$

— Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x)-\ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

— Comme $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies |g(x)-\ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$, on a alors $|f(x)+g(x)-(\ell+\ell')| \leqslant |f(x)-\ell| + |g(x)-\ell'| \leqslant \varepsilon$.

Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) = \ell+\ell'$.

Cas où ℓ est finie et $\ell' = +\infty$: Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$.

— Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x)-\ell| \leqslant 1 \implies f(x) \geqslant \ell - 1.$$

— Comme $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies g(x) \geqslant \mathrm{A} - \ell + 1.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$, on a alors $f(x)+g(x) \geqslant (\mathrm{A} - \cancel{\ell} + \cancel{1}) + (\cancel{\ell} - \cancel{1}) = \mathrm{A}$. Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) = +\infty$.

Cas où $\ell+\ell' = +\infty$: Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$.

— Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies f(x) \geqslant \frac{\mathrm{A}}{2}.$$

— Comme $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies g(x) \geqslant \frac{\mathrm{A}}{2}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$, on a alors $f(x)+g(x) \geqslant \mathrm{A}$.

Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) = +\infty$.

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $(+\infty)-(+\infty)$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim_{x\to+\infty}(x+\ell)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$, mais $\lim_{x\to+\infty}((x+\ell)-x)=\ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$, mais $\lim_{x\to+\infty}(x-2x)=\lim_{x\to+\infty}=-\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite : $\lim_{x\to+\infty}x+\cos(x)=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}x=+\infty$, mais $(x+\cos(x)-x)=\cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exemple 5 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=2+\dfrac{4}{\sqrt{x}}$ a pour limite 2 en $+\infty$.

En effet $\left.\begin{array}{rcl}\lim_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x}} & = & 0\\ \lim_{x\to+\infty}2 & = & 2\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{les sommes de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}}\lim_{x\to+\infty}2+\dfrac{4}{\sqrt{x}}=2.$

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\sqrt{x}}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=2+0=2$ d'après les théorèmes sur les limites de sommes.

II.2 Limite d'un produit

Proposition 11 (Produit) :
Soient $\ell,\ \ell'\in\mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	$\ell\neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f\times g$ a pour limite	$\ell\times\ell'$	∞ [7]	Forme Indéter.	∞ [7]

Preuve :

Cas où ℓ et ℓ' sont finies : Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.

$$|f(x)g(x)-\ell\ell'|\leqslant|(f(x)-\ell)g(x)+\ell(g(x)-\ell')|\leqslant|f(x)-\ell||g(x)|+|\ell||g(x)-\ell'|.$$

Or, d'après la proposition (6) , la fonction g est bornée dans un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a, disons par un réel $\mathrm{K}>0$.

- Comme $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x\in\mathcal{V}_{a,f}\implies|f(x)-\ell|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\mathrm{K}}.$$

- Comme $\lim_{x\to a}g(x)=\ell'$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x\in\mathcal{V}_{a,g}\implies|g(x)-\ell'|\leqslant\frac{\varepsilon}{2|\ell|}.$$

[7]. Appliquer la règle des signes d'un produit.

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$, on a alors $|f(x)g(x) - \ell\ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\cancel{\mathrm{K}}}\cancel{\mathrm{K}} + \dfrac{\varepsilon}{2\cancel{|\ell|}}\cancel{|\ell|} \leqslant \varepsilon$.

Donc $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \ell\ell'$.

Remarque : Si jamais il arrivait que ℓ ou K soient nuls, il suffirait de choisir les voisinages $\mathcal{V}_{a,g}$ et $\mathcal{V}_{a,f}$ respectivement tels que :

$$|g(x) - \ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ou} \quad |f(x) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(\mathrm{K}+1)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

sans que l'inégalité finale ne soit changée.

Cas où $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell' = +\infty$: Soit $\mathrm{A} > 0$.

— Comme $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x) - \ell| \leqslant \frac{\ell}{2} \implies f(x) \geqslant \frac{\ell}{2}.$$

— Comme $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies g(x) \geqslant \frac{2\mathrm{A}}{\ell}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$, on a alors $f(x)g(x) \geqslant \dfrac{\ell}{2} \times \dfrac{2\mathrm{A}}{\ell} = \mathrm{A}$.

Donc $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)g(x) = +\infty$.

Cas où $\ell = \ell' = +\infty$: Soit $\mathrm{A} > 0$.

— Comme $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies f(x) \geqslant \sqrt{\mathrm{A}}.$$

— Comme $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,g}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,g} \implies g(x) \geqslant \sqrt{\mathrm{A}}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}_{a,g}$, on a alors $f(x)g(x) \geqslant \mathrm{A}$.

Donc $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)g(x) = +\infty$.

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$:

— On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim_{x\to 2^+} \frac{\pi}{x-2} = +\infty$ et $\lim_{x\to 2^+} x-2 = 0$, mais $\lim_{x\to 2^+} \frac{\pi}{x-2} \times (x-2) = \pi$.

— On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, mais $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} \times x^2 = -\infty$.

— On peut ne pas obtenir de limite : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, mais $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \times x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

II.3 Limite d'un quotient

Proposition 12 (Inverse) :
Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	$\ell \neq 0$	0	∞
alors $\frac{1}{f}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell}$	∞[8]	0

Preuve :
Cas où $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell \neq 0$: Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|f(x)-\ell|}{|f(x)|\,|\ell|}.$$

— Comme $\ell \neq 0$, d'après le théorème (7), il existe un voisinage $\mathcal{V}'_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}'_{a,f} \implies f(x) \neq 0.$$

— Comme $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x)-\ell| \leqslant \min\left(\frac{|\ell|}{2} ; \frac{|\ell|^2\,\varepsilon}{2}\right).$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire,

$$x \in \mathcal{V}_{a,f},\ \big||f(x)| - |\ell|\big| \leqslant |f(x)-\ell| \leqslant \frac{|\ell|}{2} \implies |f(x)| \geqslant |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}'_{a,f}$, on a alors

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|f(x)-\ell|}{|f(x)|\,|\ell|} \leqslant \frac{\frac{|\ell|^2\,\varepsilon}{2}}{\frac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \varepsilon.$$

[8]. Appliquer la règle des signes d'un quotient.

Donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.

Cas où $\ell + \infty$: Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies f(x) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

En particulier, $\forall\, x \in \mathcal{V}_{a,f}$, $f(x) > 0$ puis $\dfrac{1}{|f(x)|} = \dfrac{1}{f(x)} \leqslant \varepsilon$.

Donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Cas où $\ell = 0$: On suppose, par exemple, que 0 est atteint par valeurs supérieures.

Soit $\mathrm{A} > 0$.

— Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe un voisinage $\mathcal{V}'_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}'_{a,f} \setminus \{a\} \implies f(x) > 0.$$

— Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{a,f}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{a,f} \implies |f(x)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{A}}.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_{a,f} \cap \mathcal{V}'_{a,f}$, on a alors $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{|f(x)|} \geqslant \mathrm{A}$.

Donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

En remarquant que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$, on en déduit alors les résultats sur les limites de quotients :

Proposition 13 (Quotient) :
Soient ℓ, $\ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ' [9]
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞ [10]	Forme Indéter.	0	∞ [10]

Exercice 7 : Calculer les limites suivantes :

[9]. y compris $\ell' = 0$.
[10]. Appliquer la règle des signes d'un quotient.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-\frac{1}{x}}{1-x^4}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2-\sqrt{4-\frac{1}{x}}}$.

Correction :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-\frac{1}{x}}{1-x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^3}}{x^2\left(\frac{1}{x^4}-1\right)} = 0.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2-\sqrt{4-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} 2+\sqrt{4-\frac{1}{x}} = 4$ grâce à la partie conjuguée.

II.4 Limite d'une composée

Proposition 14 (Limite d'une fonction Composée) :
Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à E et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x\to b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = c.$$

Preuve : Parmi les 27 cas possibles, démontrons ce théorème quand a et c sont finis et $b = +\infty$, par exemple.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $]c-\varepsilon\,;c+\varepsilon[$ un voisinage ouvert de c.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to b} g(x) = c$, $\exists\, \mathrm{A}(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, \mathrm{X} \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{X} > \mathrm{A} \implies g(\mathrm{X}) \in]c-\varepsilon\,;c+\varepsilon[.$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b(=+\infty)$, *i.e.* , qu'il existe $\alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$x \in]a-\alpha\,;a+\alpha[\implies f(x) \in]\mathrm{A}\,;+\infty[\textit{ i.e. } f(x) > \mathrm{A}.$$

Conclusion, $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \in]a-\alpha\,;a+\alpha[$ entraîne $f(x) > \mathrm{A}$ puis $g(f(x)) \in]c-\varepsilon\,;c+\varepsilon[$.

On a bien montré que $\displaystyle\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Cette dernière propriété nous permet alors de justifier la recherche d'une limite par changement de variable *i.e.* on ne s'intéresse plus à la limite de $(gof)(x)$ quand $x \to a$, mais de $g(\mathrm{X})$ quand $\mathrm{X} \to b$.

Exemple 6 : On cherche la limite de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x)+1}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x)+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{X=\ln(x) \\ \lim_{x\to 0} X = -\infty}}}}{=} \lim_{X\to-\infty} \frac{X^2+2X}{X^2+1} = 1.$$

Exercice 8 : Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

Dans tous les cas, préciser l'équation d'une éventuelle asymptote à la courbe représentative de f.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+6x-7}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+x}{1-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{2-x}{x}}$

Correction :

1. D'après le domaine de définition de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+6x-7}$, la seule limite envisageable en 1 est celle par valeurs supérieures :
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+6x-7} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x+7}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty.$$
La courbe admet la droite d'équation $x=1$ comme asymptote.
2. De même, seule la limite en 1 par valeurs inférieures est envisageable et, d'après les théorèmes sur les limites de produits, on a :
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1+x}{1-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 2\sqrt{2} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}} = +\infty.$$
La courbe admet la droite d'équation $x=1$ comme asymptote.
3. Ici aussi, seule la limite en 0 par valeurs supérieures est à envisager :
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{\frac{2-x}{x}} = \sqrt{2} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$
La courbe admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

En posant $g \equiv |...|$ dans la proposition (14) , on retrouve le corollaire (4.1) :

Corollaire 14.1 (Limite et valeur absolue) :
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{K}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \implies \lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|.$$

Les deux théorèmes suivants sont de simples corollaires de la proposition (14) précédente. Leurs applications sont cependant loin d'être triviales. Nous en verrons quelques exemples.

Corollaire 14.2 (Limite d'une suite explicite) :
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[\mathrm{A}\,;+\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{A}$.

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Rien à démontrer ici. C'est la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ en remplaçant x par n.

Exemple 7 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{\dfrac{3n+2}{n+1}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3$ et $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$, on a aisément $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Corollaire 14.3 (Limite d'une suite quelconque) :
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes appartiennent à I.

Pour réels a et b de $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b.$$

Preuve :

— Soit J_b un voisinage ouvert quelconque de b [11].
— Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ ouvert de a [12] (dépendant de J_b) tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{V}_a \cap \mathrm{I} \implies f(x) \in \mathrm{J}_b.$$

— Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ *i.e.* , il existe un rang $n_0(\mathcal{V}_a) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies u_n \in \mathcal{V}_a.$$

— Conclusion, $n \geqslant n_0$ entraîne $u_n \in \mathcal{V}_a$ puis $f(u_n) \in \mathrm{J}_b$.

On a bien prouvé que :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b.$$

Cet énoncé est la base d'un théorème fort des suites récurrentes définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. En effet, si $u_n \longrightarrow \ell$, alors $u_{n+1} \longrightarrow \ell$.

Le corollaire précédent permet donc d'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n).$$

On est à l'aube d'un de vos premiers théorèmes d'interversion de limites !

Pour l'instant, on ne peut encore rien dire si ce n'est que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendra vers la limite de f en ℓ pour peu qu'elle en ait une.

Mais, imaginons que, tout naturellement, on ait $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$ ou, autrement dit, que f soit **continue** en ℓ.

On obtiendrait alors un moyen efficace de trouver la limite d'une suite récurrente à l'aide de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ que l'on ferait « passer à la limite » :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

Autrement dit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right).}$

(sous conditions de continuité de f)

La limite cherchée serait alors nécessairement une solution de l'équation

$$f(x) = x.$$

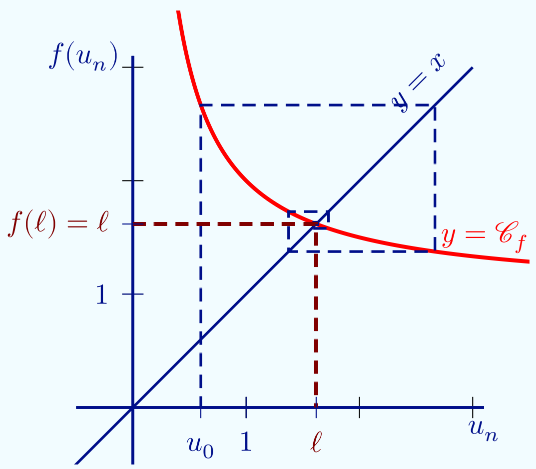
Nous y reviendrons plus avant dans les chapitres suivants car, pour l'instant, rien ne nous assure que $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$!!!

Exemple 8 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite définie par récurrence par une fonction dont est tracée la courbe représentative ci-contre.

Les termes de la suite semblent converger vers le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$, un « point fixe » de f.

On verra dans quel contexte ceci est vrai.



En pratique, le corollaire (14.3) permet souvent de démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point a :

Méthode 3 (Montrer qu'une fonction n'a pas de limite) :
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pour montrer que f n'a pas de limite en a, il suffit de trouver 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

Exemple 9 (cos n'a pas de limite en $\pm\infty$) : Considérons les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \dfrac{\pi}{2} + u_n$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(u_n) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(v_n)$.

La fonction cos ne peut donc avoir de limites en $+\infty$.

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ périodique et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

Montrer que f est constante.

Correction : Soit T une période de f et $x_0 \in \mathbb{R}$.

La suite $(x_0 + n\mathrm{T})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Puisque f admet une limite ℓ en $+\infty$, la suite $\left(f(x_0 + n\mathrm{T})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Or, par T-périodicité, on sait que $f(x_0 + n\mathrm{T}) = f(x_0)$ pour tout $n \geqslant 1$.

Par passage à la limite, on obtient $f(x_0) = \ell$ et donc la fonction f est constante égale à ℓ.

On retrouve ici que les fonctions cos et sin ne peuvent avoir de limites en l'infini.

III/ Propriétés de la limite

III.1 Limite et relation d'ordre

Proposition 15 (Limite et ordre) :
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g définies sur tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a.

$$\text{Si,} \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a,\ g(x) \leqslant f(x), \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell' \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \end{cases} \qquad \text{alors} \quad \ell' \leqslant \ell.$$

On parle souvent de conservation des inégalités **larges** par passage à la limite.

Preuve :

Avec le théorème (7) : D'après le théorème (7), si $\ell' - \ell > 0$ alors $g(x) - f(x) > 0$ sur un voisinage de $\mathcal{V}_a$ de a.

Par la contraposition, si $g(x) - f(x) \leqslant 0$ *i.e.* $g(x) \leqslant f(x)$ sur un voisinage de a alors $\ell' \leqslant \ell$.

Preuve directe : Soit $\mathcal{V}_a$ un voisinage de a et supposons que $\forall\, x \in \mathcal{V}_a$, $g(x) \leqslant f(x)$ avec $\ell' > \ell$.

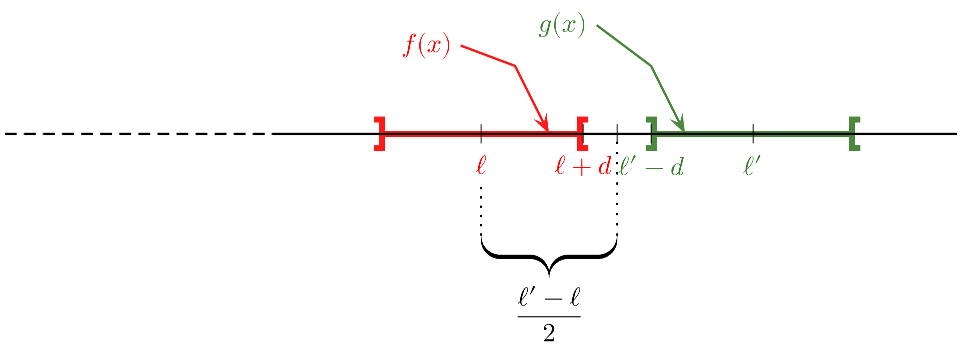
Posons alors, comme pour la démonstration de l'unicité de la limite, $d < \dfrac{\ell' - \ell}{2}$.

— Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\ell,f}$ de ℓ tel que :

$$\forall\, x \in \mathcal{V}_{\ell,f} \cap \mathcal{V}_a, \quad \ell - d < f(x) < \ell + d.$$

— Comme $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\ell',g}$ de ℓ' tel que :

$$\forall\, x \in \mathcal{V}_{\ell',g} \cap \mathcal{V}_a, \quad \ell' - d < g(x) < \ell' + d.$$



D'où, pour $x \in \mathcal{V}_{\ell,f} \cap \mathcal{V}_{\ell',g} \cap \mathcal{V}_a$, on obtiendrait :

$$f(x) < \ell + d < \ell' - d < g(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) < g(x).$$

D'où la contradiction et la nécessité que $\ell' \leqslant \ell$.

Remarques :

— La proposition (15) n'est pas vraie avec des inégalités strictes : Si $g(x) < f(x)$ alors on ne peut pas en déduire $\ell < \ell'$ mais seulement $\ell \leqslant \ell'$:

Prenez, par exemple $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ qui tendent toutes deux vers 0 alors qu'il est clair que $-\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

— La proposition (15) permet de comparer deux limites, mais elle ne permet pas de démontrer l'existence de la limite d'une fonction ce qui n'est pas le cas des théorèmes qui suivent.

— La proposition (15) peut s'étendre aux limites à gauche ou à droite. (Il suffit simplement de modifier l'intervalle de définition des fonctions).

Théorème 16 :
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, trois fonctions f, g et h définies sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a et ℓ un réel.

Théorème d'encadrement :

$$\text{Si} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

Théorème de majoration :

$$\text{Si} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Théorème de minoration :

$$\text{Si} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad f(x) \leqslant g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Ce théorème est également vrai pour des limites à gauche ou à droite.

Preuve :

Théorème d'encadrement : Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $[\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon]$ un voisinage quelconque de ℓ.

Comme $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$, il existe deux voisinages $\mathcal{V}_{g,a}$ et $\mathcal{V}_{h,a}$ de a tels que :

$$x \in \mathcal{V}_{g,a} \implies \ell-\varepsilon \leqslant g(x) \leqslant \ell+\varepsilon \quad \text{et} \quad x \in \mathcal{V}_{h,a} \implies \ell-\varepsilon \leqslant h(x) \leqslant \ell+\varepsilon.$$

Pour $x \in \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}_{g,a} \cap \mathcal{V}_{h,a}$, on a alors :

$$\ell-\varepsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell+\varepsilon \quad \textit{i.e.} \quad f(x) \in [\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon]\,.$$

Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Théorème de majoration : La démonstration est identique en plus simple.

Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et $[\mathrm{A}\,;+\infty[$ un voisinage de $+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{g,a}$ de a tel que :

$$x \in \mathcal{V}_{g,a} \implies \mathrm{A} \leqslant g(x).$$

Pour $x \in \mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}_{g,a}$, on a alors :

$$\mathrm{A} \leqslant g(x) \leqslant f(x) \quad \textit{i.e.} \quad f(x) \in [\mathrm{A}\,;+\infty[\,.$$

Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Théorème de minoration : La démonstration est identique.

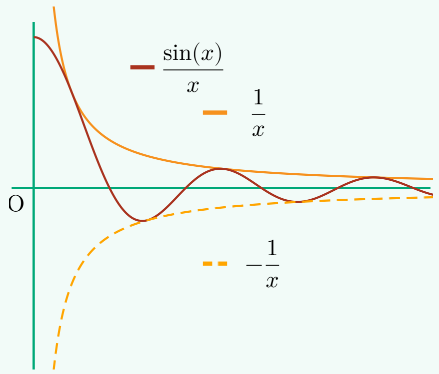
Exercice 10 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$.
2. $\lim_{x\to+\infty} x+\cos(x)$.
3. $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$.
4. $\lim_{x\to\pm\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$.

Correction :

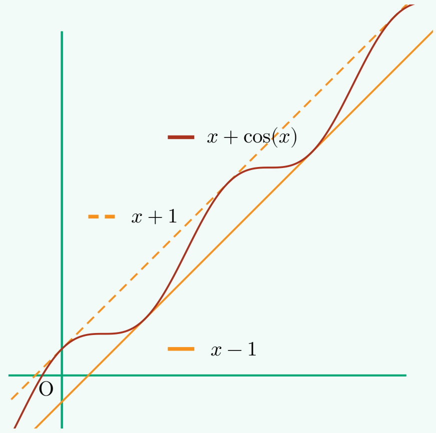
1. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, d'où $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$.

   Comme $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, on a :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$



2. De la même manière, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x-1 \leqslant x+\cos(x)\ (\leqslant x+1)$.

   Comme $\lim_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$, d'après le théorème de comparaison :
$$\lim_{x\to+\infty} x+\cos(x) = +\infty.$$



3. $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor + 1 \iff \frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$.

   Donc, suivant le signe de x, on a :
$$1-x < x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad 1 < x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant 1-x.$$

   Dans tous les cas, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 0$.

4. Pour $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 0$.

   De même, $\forall\, x < -1$, $-1 < \frac{1}{x} < 0$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = -1$ et $\lim_{x\to-\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$.

III.2 La monotonie contrôle la limite

Les variations de la fonction peuvent aussi « forcer » certaines propriétés de la limite.

Théorème 17 (Théorème de la limite monotone) :
Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et $f :]a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

— Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b, et $\lim_{x\to b} f(x) = \sup_{]a;b[}(f) < +\infty$.

— Si f n'est pas majorée, alors $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.

Preuve : On ne traite ici que le cas où $b < +\infty$. Le cas infini étant plus simple.

— On suppose que f est majorée et on considère $\mathrm{F} = \{f(x), x \in]a\,;b[\,\}$. L'ensemble F est donc une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée.

  F admet donc une borne supérieure $\ell = \sup\{f(x),\ x \in]a\,;b[\,\} = \sup_{]a;b[}(f)$.

  Soit $\varepsilon > 0$.

  Par définition de ℓ, $\ell-\varepsilon$ n'est plus un majorant de F. Il existe donc $u \in]a\,;b[$ tel que $\ell-\varepsilon < f(u) \leqslant \ell$.

  Comme f est croissante, $\forall\, x \in]a\,;b[$,

$$x \geqslant u \implies \ell - \varepsilon < f(u) \leqslant f(x) \leqslant \ell\ < \ell + \varepsilon. \tag{XV.1}$$

  Posons $\eta = b - u > 0$. Quel que soit x dans $]a, b[$, si $|x-b| \leqslant \eta$, alors $b-\eta \leqslant x < b$ i.e. $u \leqslant x < b$.

  D'après (XV.1), on a alors $\ell - \varepsilon < f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$ d'où $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

  Et donc $\lim_{x\to b} f(x) = \ell < +\infty$.

— On suppose maintenant que f n'est pas majorée et soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$.

  Comme A n'est pas un majorant de f, il existe $u \in]a\,;b[$ tel que $\mathrm{A} \leqslant f(u)$.

  Comme f est croissante, $\forall\, x \in]a\,;b[$,

$$x \geqslant u \implies \mathrm{A} \leqslant f(u) \leqslant f(x). \tag{XV.2}$$

  Posons $\eta = b - u > 0$. Quel que soit x dans $]a\,;b[$, si $|x-b| \leqslant \eta$, alors $u \leqslant x < b$.

  D'après (XV.2), on a alors $f(x) \geqslant \mathrm{A}$.

  Et donc $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.

Dans le cas croissant, on a donc montré que $\lim_{x\to b} f(x) = \sup_{]a;b[}(f)$ (éventuellement $+\infty$).

Remarque : Lorsque f est décroissante, on a les résultats correspondants :

— Si f est décroissante et minorée, alors $\lim_{x\to b} f(x) = \inf_{]a;b[}(f) > -\infty$.

— Si f est décroissante et non minorée, alors $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$.

III.3 Limites à gauche et à droite

Proposition 18 :
Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et $f :]a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante et $x_0 \in]a\,;b[$.

Alors, f admet une limite à gauche et une limite à droite finies en x_0 et

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Preuve : Dire que f est définie en x_0 revient à dire que $f(x_0)$ existe et $-\infty < f(x_0) < +\infty$.

Notons $f_1 = f_{|]a,x_0[}$. La fonction f_1 est croissante, et majorée par $f(x_0)$.

D'après le théorème (17), f_1 admet donc une limite finie en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \sup\limits_{]a,x_0[}(f_1)$.

Or, par définition, $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

D'autre part, $\sup\limits_{]a,x_0[}(f_1)$ étant *le plus petit* des majorants de f_1, et $f(x_0)$ étant un majorant de f_1, on peut en déduire que $\sup\limits_{]a,x_0[}(f_1) \leqslant f(x_0)$.

On a donc prouvé que f admettait une limite à gauche en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0)$.

Idem pour la limite à droite en considérant $f_2 = f_{|]x_0,b[}$ décroissante, minorée et

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{]x_0,b[}(f_2) \geqslant f(x_0).$$

On retiendra le théorème et la proposition précédents sous la forme ci-dessous :

Corollaire 18.1 :
Toute fonction monotone possède une limite à gauche et une limite à droite en tout point en lequel cela a un sens.

Afin de bien le comprendre, précisons ces énoncés :

À retenir 1 :
Le théorème de la limite monotone affirme que dans le cas particulier d'une fonction $f : [a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ croissante avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a\,;+\infty]$:

1. la limite $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ EXISTE et elle est forcément FINIE car $f(a) \leqslant \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ par passage à la limite,
2. pour tout $c \in]a\,;b[$, les limites $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ EXISTENT et elles sont forcément FINIES car $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$,
3. la limite $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ EXISTE et elle est soit finie, soit égale à $+\infty$.

IV/ Extension aux fonctions complexes

Définition/Théorème 5 (Limite d'une fonction complexe en un point) : Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathscr{V}_{\mathbb{C}}(\ell), \quad \exists\, \mathrm{V}_a \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(a), \quad \forall\, x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{V}_a, \quad f(x) \in \mathrm{V}_\ell,$$

i.e.

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0, \quad \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |x-a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

ou encore

$$\lim_{x \to a} |f(x) - \ell| = 0.$$

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable, ce qui autorise la notation $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

On définit de la même manière que précédemment les limites à gauche et à droite (en a).

Théorème 19 (Parties réelle et imaginaire) :
Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to a} \mathrm{Re}\,(f)(x) = \mathrm{Re}\,(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \mathrm{Im}\,(f)(x) = \mathrm{Im}\,(\ell).$$

Définition 6 (Fonction bornée) : Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que f est bornée s'il existe un réel $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que $\forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |f(x)| \leqslant \mathrm{K}$.

Globalement, on dit que f est bornée sur D si, et seulement si $|f|$ l'est.

En particulier,

Corollaire 19.1 :
Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Si $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ admet une limite finie en $a \in \overline{\mathrm{D}}$ alors f est bornée sur un voisinage de a.

Preuve : Soit $\ell \in \mathbb{C}$ la limite de f en a. Alors,

$$\forall\, x \in \mathrm{D}, \ |f(x)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell|\,.$$

Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant 1$ et

$$\forall\, x \in \mathrm{D} \cap [a-\alpha\,; a+\alpha]\,, \ ||f(x)| - |\ell|| \leqslant |f(x) - \ell| \leqslant 1 \implies |f(x)| \leqslant 1 + |\ell|\,.$$

Globalement,

$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+, \ \exists\, \eta > 0, \ \forall\, x \in \mathrm{D} \cap [a-\eta\,; a+\eta]\,, \ |f(x)| \leqslant \mathrm{M}.$$

Donc, f est bornée dans un voisinage de a.

ATTENTION

Pas de $\pm\infty$ dans $\mathbb{C}$ ni de théorèmes basés sur la relation d'ordre.

Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions complexes, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.

Les grands théorèmes d'existence de limite - théorèmes d'encadrement/minoration/-majoration et théorème de la limite monotone - n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.