Chapitre

XV Fonctions de la variable réelle - LIMITES

CONTENU

Dans tout ce chapitre, on considère une fonction définie sur un sous-ensemble quelconque D de $\mathbb{R}$:

$$f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}.$$

I/ Limites

Il est difficile de parler proprement de limites sans connaître un peu de topologie qui n'est pas au programme de PTSI. Essayons !

Considérons l'intervalle ouvert $]0\,;1[$. L'intuition doit vous convaincre que tout élément $x \in]0\,;1[$ peut être enchâssé dans un intervalle ouvert de la forme $]x-r\,;x+r[$ qui, à condition de choisir r « assez petit », est lui-même inclus tout entier dans $]0\,;1[$.

On dit alors que $]x-r\,;x+r[$ est un *voisinage de x*. C'est cette propriété de $]0\,;1[$ d'être voisin de chacun de ses points qui fait dire de lui qu'il est *ouvert*.

Ce n'est pas le cas de l'intervalle $[0\,;1]$. En effet, pour $x=1$, il est tout à fait impossible de trouver un voisinage $]1-r\,;1+r[$ inclus tout entier dans $[0\,;1]$.

A contrario, son complémentaire dans $\mathbb{R}$, la réunion des deux intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]1\,;+\infty[$ l'est. On dit alors que $[0\,;1]$ est *fermé*.

En ce sens, l'intervalle $]-\infty\,;2]$ est fermé car son complémentaire (dans $\mathbb{R}$), $]-\infty\,;2[$ est ouvert.

I.1 Point adhérent

Lorsque l'on étudie la limite d'une fonction f définie sur un ensemble D en un point a *i.e.* lorsque « x tend a », il est sous-entendu que $x \neq a$ mais aussi que a peut être ainsi approché par des points de D.

Autrement dit et intuitivement, a ne peut pas être « trop loin » de D : « intérieur » à D ou « au bord de » de D.

Plus précisément,

Définition 1 (Point intérieur/adhérent à une partie de $\mathbb{R}$) : (Hors-Programme)
Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Point intérieur : Soit $x \in \mathbb{R}$.

On dit que x est *intérieur* à A si A contient un voisinage de x :

$$\exists\, \mathrm{V}_x \in \mathcal{V}(x), \mathrm{V}_x \subset \mathrm{A}.$$

On note $\mathring{\mathrm{A}}$ leur ensemble.

Point adhérent : Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que x est *adhérent* à A si A rencontre tout voisinage de x :

$$\forall\ \mathrm{V}_x \in \mathcal{V}(x),\ \mathrm{A} \cap \mathrm{V}_x \neq \emptyset.$$

On note $\overline{\mathrm{A}}$ leur ensemble.

Un point intérieur à une partie y est aussi adhérent. La réciproque est fausse.

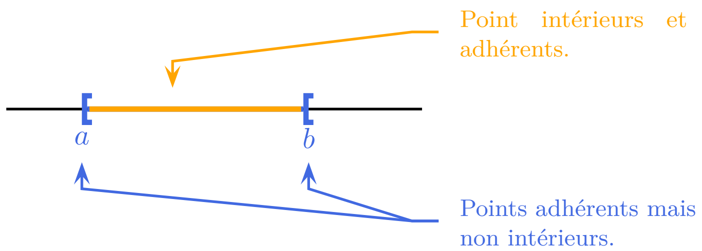


Figure XV.1 – Points intérieurs et adhérents à un intervalle $[a\,;b[$.

Exemples 1 :

- 1 est adhérent à $[0\,;1[$ et $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}_+^*$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors $\overset{\circ}{\overbrace{[a\,;b[}} =]a\,;b[$ et $\overline{[a\,;b[} = [a\,;b]$.

  D'une manière générale, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\overline{\mathrm{I}}$ est l'intervalle fermé correspondant dans $\mathbb{R}$ en incluant les bornes finies et $\mathring{\mathrm{I}}$ l'intervalle ouvert excluant les bornes.

I	$\mathring{I}$	$\bar{I}$
$]1\,;2] \cup [3\,;4]$	$]1\,;2[\cup]3\,;4[$	$[1\,;2] \cup [3\,;4]$
$]1\,;+\infty[$	$]1\,;+\infty[$	$[1\,;+\infty[$
$]-\infty\,;2[$	$]-\infty\,;2[$	$]-\infty\,;2]$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

En particulier, $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

— Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. Alors,
  - — a et b sont adhérents à $[a\,;b[$.
  - — $\forall\, x \in \mathbb{R}$ tel que $a < x < b$ est à la fois intérieur et adhérent à $[a\,;b[$.

Proposition 1 (Caractérisation séquentielle) :
Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

x est adhérent à A si, et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Corollaire 1.1 :
Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

$$\sup(A) \in \overline{A} \qquad \text{et} \qquad \inf(A) \in \overline{A}.$$

En particulier, on pourra toujours trouver une suite d'éléments de A convergeant vers $\sup(A)$. De même pour $\inf(A)$.

I.2 Limites

Définition 2 (Définition topologique des limites) : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet une *limite* b lorsque x tend vers a si, et seulement si

$$\forall\ V_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, U_a \in \mathcal{V}(a) \,/\, \forall\, x \in U_a \cap D \implies f(x) \in V_b.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Remarque : Les inégalités sont indifféremment strictes ou larges pour définir des voisinages ouverts ou fermés excepté $\varepsilon > 0$. Le programme demande d'utiliser des inégalités larges ce que j'essaierai.

On retrouve alors tous les cas déjà connus :

Proposition 2 (Limites en $+\infty$) :
Soient D tel que $+\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{D}, x \geqslant \alpha \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{D}, x \geqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$
— $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall \mathrm{B} \in \mathbb{R}, \exists \alpha(\mathrm{B}) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{D}, x \geqslant \alpha \implies f(x) \leqslant \mathrm{B}.$

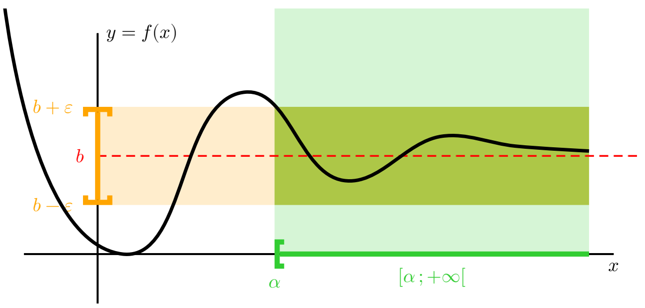


Figure XV.2 – Limite finie en l'infini.

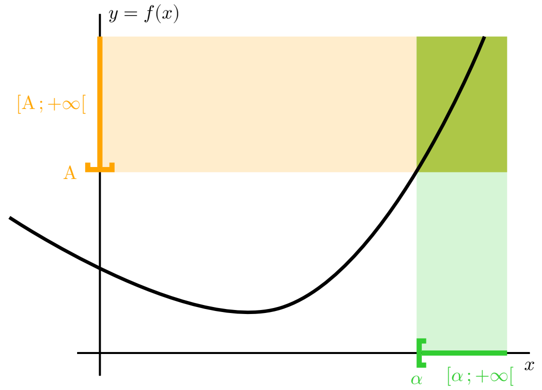


Figure XV.3 – Limite infinie à l'infini.

Exercice 1 : À l'aide de la définition, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

De manière analogue, en $-\infty$:

Proposition 3 (Limites en $-\infty$) :
Soient D tel que $-\infty \in \overline{\mathrm{D}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

— $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{D}, x \leqslant \beta \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
— $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists \beta(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{D}, x \leqslant \beta \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$
— $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall \mathrm{B} \in \mathbb{R}, \exists \beta(\mathrm{B}) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{D}, x \leqslant \beta \implies f(x) \leqslant \mathrm{B}.$

$f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
$\underset{n\neq 0}{x^n}$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair
$\underset{n\neq 0}{\dfrac{1}{x^n}}$	0	0
$\sqrt{x}$	$+\infty$	non défini
$\ln(x)$	$+\infty$	non défini
e^x	$+\infty$	0
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	0	non défini
$\sin(x)$ $\cos(x)$ $\tan(x)$	pas de limite	pas de limite
$\arctan(x)$	$\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2}$
$\mathrm{ch}\,(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\mathrm{sh}\,(x)$	$+\infty$	$-\infty$

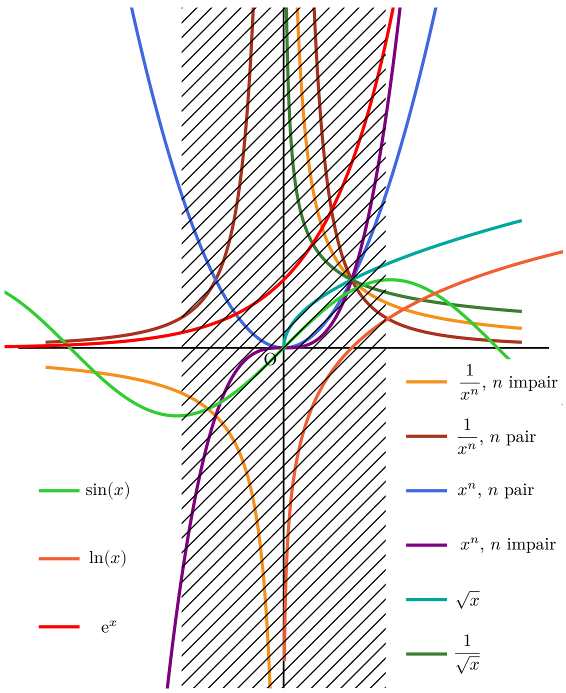


Figure XV.4 – Limites des fonctions de référence en l'infini.

Remarque : Toutes les fonctions n'ont pas nécessairement une limite en l'infini. C'est le cas, notamment des fonctions circulaires cos, sin ou tan mais aussi de la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \lfloor x \rfloor \,. \end{array}$$

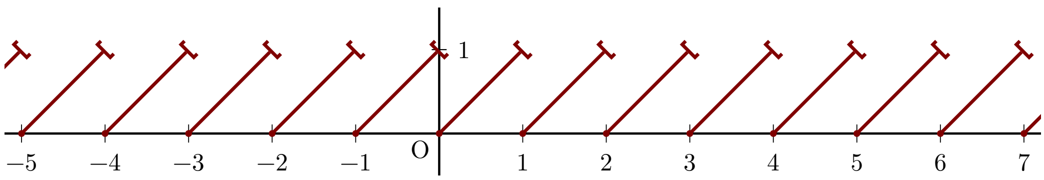


Figure XV.5 – La fonction $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ n'a pas de limite en $\pm\infty$.

Exercice 2 : Déterminer les limites (si elles existent) en $\pm\infty$ des fonctions suivantes :

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{5x^3 - x}$ $\qquad f_2 : x \longmapsto \cos(x) - x$ $\qquad f_3 : x \longmapsto x^2 e^{-x} - x$

Soient α, β, γ des **réels strictement positifs**.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{\ln^\gamma(x)} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\beta \left|\ln(x)\right|^\gamma = 0.$$

Figure XV.6 – Croissances comparées.

Proposition 4 (Limite en un point fini) :
Soient $a \in \overline{\mathrm{D}} \cap \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon.$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant \mathrm{A}.$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| \leqslant \alpha \implies f(x) \leqslant \mathrm{A}.$

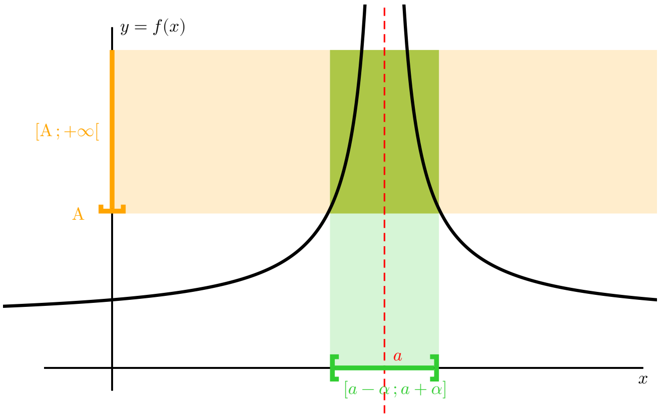


Figure XV.7 – Limite infinie en un point fini

$f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)$
$\dfrac{1}{x^n}$ $_{n\neq 0}$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$+\infty$	non défini
$\ln(x)$	$-\infty$	non défini

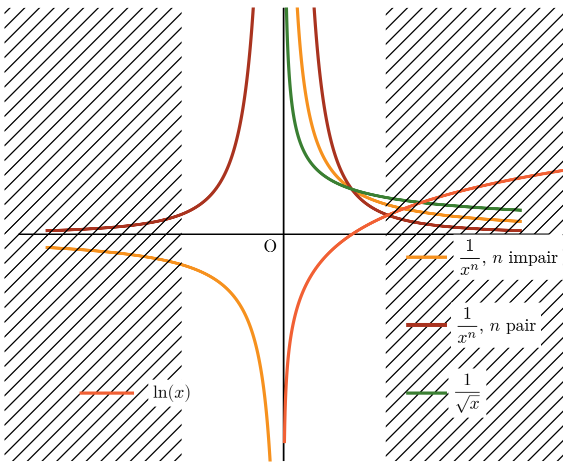


Figure XV.8 – Limites des fonctions de référence en 0.

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}\,(x)}{x}\\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}\end{array}\right\}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Figure XV.9 – Taux d'accroissement de fonctions dérivables.

Exercice 3 : Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes en 0. On distinguera éventuellement 0^- et 0^+.

$f_1 : x \longmapsto x-\ln(x)$

$f_2 : x \longmapsto x\sqrt{1+(\ln(x))^2}$

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{5x}-\mathrm{e}^{3x}}{x}$

$f_4 : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Corollaire 4.1 (Limite et valeur absolue) :
Soient $a\in\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $f : \mathrm{D}\longmapsto\mathbb{K}$ et $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \implies \lim_{x\to a}|f(x)|=|\ell|\,.$$

Théorème 5 (Unicité de la limite, cas réel) :
Soit $a\in\overline{\mathrm{D}}$ et f une fonction réelle.

Si elle existe, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est unique.

Notation : En cas d'existence de la limite en a, le théorème (5) permet de justifier la notation, maintenant non ambigüe, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ de LA limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

ATTENTION

Certaines fonctions peuvent ne pas avoir de limite en un point.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

En 0, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\pm\infty$. Comme la limite de $\sin(x)$ en l'infini n'existe pas, celle de $f(x)$ en 0 n'existe pas non plus. Nous verrons dans un autre chapitre une manière efficace et rigoureuse de montrer ce point.

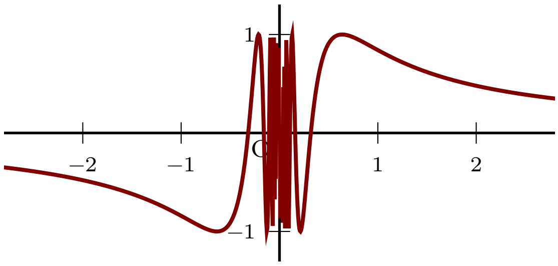


Figure XV.10 – La fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

I.3 La limite contrôle la fonction

Proposition 6 :
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, D un voisinage de a et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Théorème 7 :
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $m < \ell$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $m < f(x)$.
2. Si $\ell < \mathrm{M}$ alors, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x) < \mathrm{M}$.

Un cas particulier TRÈS important est le cas où $\ell > 0$ ou $\ell \neq 0$, le théorème (7) nous assure de l'existence d'un voisinage de a sur lequel $f(x) > 0$ ou $f(x) \neq 0$ *i.e.* il existe un voisinage de a sur lequel, f prend des valeurs du même signe que sa limite.

I.4 Limites à droite et à gauche

Proposition 8 :
Si f est définie en $a \in \overset{\circ}{\mathrm{D}}$ et y admet une limite, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

Une fonction ne peut donc pas avoir de limite infinie en un point où elle est définie.

ATTENTION

La proposition (8) ne dit absolument pas que toute fonction définie en a est continue en a mais seulement qu'une condition nécessaire à l'être est que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

Définition 3 (Limites à droite et à gauche) : Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

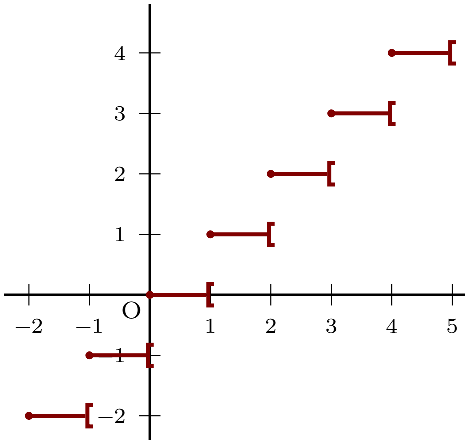
Limite à gauche : Si a est adhérent à $\mathrm{D} \cap]-\infty\,; a[$, on dit que f possède une *limite à gauche* en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]-\infty;a[}$ possède une limite en a.

Cette limite est notée $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in]-\infty;a[}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou encore $f(a-0)$.

Limite à droite : Si a est adhérent à $\mathrm{D} \cap]a\,;+\infty[$, on dit que f possède une *limite à droite* en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]a;+\infty[}$ possède une limite en a.

Cette limite est notée $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in]a;+\infty[}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $f(a+0)$.

Remarque : a n'appartient ni à $\mathrm{D} \cap]-\infty\,;a[$ ni à $\mathrm{D} \cap]a\,;+\infty[$. Il y est seulement adhérent.



$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} \lfloor x \rfloor = n - 1$$

et

$$\lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} \lfloor x \rfloor = n.$$

Figure XV.11 – La fonction partie entière n'a pas de limites en tout point de $\mathbb{Z}$ mais seulement des limites à droite et à gauche.

Ici la définition topologique atteint ses limites et on doit utiliser une définition métrique ou au moins partiellement :

Corollaire 8.1 :
Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

— Dire que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}_b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad \underset{\text{ou } x \in [a-\alpha\,;a[}{a - \alpha \leqslant x < a} \quad \Longrightarrow f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

— Dire que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$ revient à dire que :

$$\forall\, \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \alpha(\mathrm{V}_b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad \underset{\text{ou } x \in]a\,;a+\alpha]}{a < x \leqslant a + \alpha} \quad \Longrightarrow f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

Les limites à gauche/à droite ne sont jamais que des limites au sens initial du chapitre mais appliquées à des restrictions. Cela justifie qu'elles auront les mêmes propriétés notamment leur unicité. Plus particulièrement, le théorème (5), la proposition (6) le théorème (7) sont vrais pour des limites à droite ou à gauche. Et, généralement, tous les théorèmes qui suivront, sauf mention contraire ou explicite seront également vrais dans ces cas.

Théorème 9 (Limite et limites à gauche et à droite) :
Soit $a \in \overline{\mathbb{D}}$.

La fonction f admet une limite en a notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si, et seulement si

1. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$ si f est définie en a.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ si f n'est pas définie en a.

En particulier, dans tous les cas, une condition nécessaire est que les quantités $f(a-0)$ et $f(a+0)$ existent et soient égales.

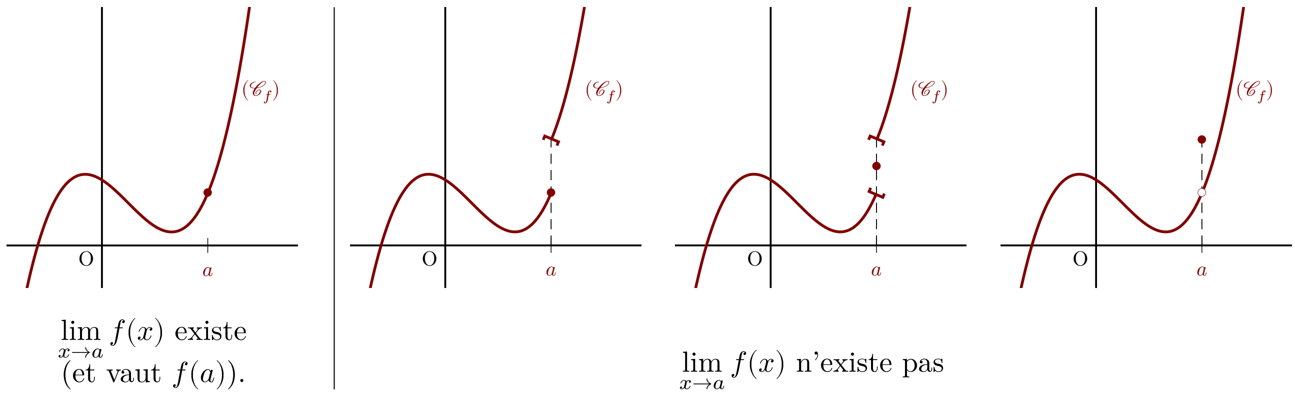


Figure XV.12 – Caractérisation de la limite en fonction des ses limites à gauche et à droite.

Exemple 2 :

— La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ a pour limite $+\infty$ en 0 [1].

— La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 mais $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

— Soit δ_0, la fonction qui, à tout réel associe 1 si $x = 0$ et 0 sinon.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \delta_0 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \delta_0 = 0$ mais δ_0 n'a pas de limite en 0 car $\delta_0(0) = 1$.

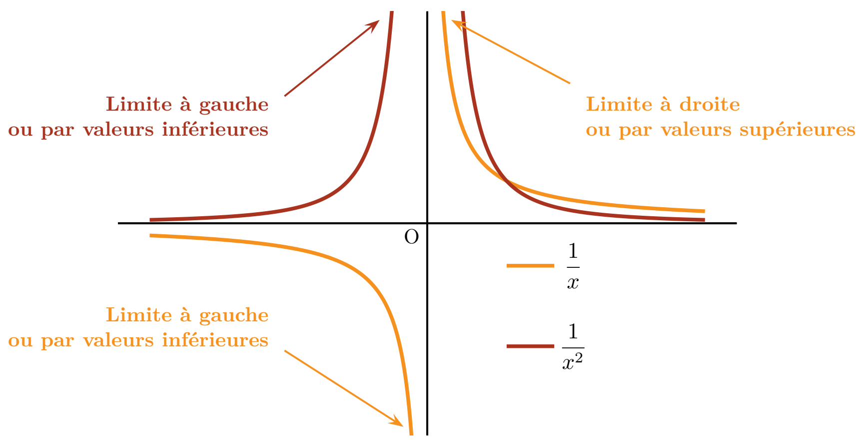


Figure XV.13 – Limites à droite et à gauche d'une fonction

[1]. Car la même limite infinie à droite et à gauche.

Exemples 3 : Étudions les limites de $\dfrac{1}{2-x}$ et $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ dans un voisinage de 2 :

Comme $\lim\limits_{x\to 2} 2-x = 0$, on est ramené à l'étude de $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{1}{u}$ qui dépend du signe de u :

1. On commence par dresser un tableau de signes de $x-2$: [2]

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

Avec les conventions de notations :

$$\lim_{x\to 2^-} 2-x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^+} 2-x = 0^-.$$

2. On conclut :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 2^-} 2-x & = & 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty,$$

et

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 2^+} 2-x & = & 0^- \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} & = & -\infty \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty.$$

Ici, malgré la difficulté apparente, $\lim\limits_{x\to 2^-} (2-x)^2 = \lim\limits_{x\to 2^+} (2-x)^2 = \lim\limits_{x\to 2} (2-x)^2 = 0^+$.

D'où :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 2} (2-x)^2 & = & 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les composées de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim_{x\to 2} \frac{1}{(2-x)^2} = +\infty.$$

En conclusion, on remarquera bien que si $\dfrac{1}{2-x}$ n'a pas de limite en 2, $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ en a bien une qui est $+\infty$.

Exemples 4 :

— La fonction partie entière à des limites à droite et à gauche distinctes pour tout a $\in \mathbb{Z}$ et n'admet donc pas de limite en ces points.

— La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en 0 mais y admet une limite :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} f(x) = 1.$$

— La fonction sinus cardinal $g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie en 0 et y admet une limite :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1.$$

— La fonction $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie en 0, admet une limite à droite et une limite à gauche en 0 mais n'admet pas de limite en 0.

[2]. Au moins dans sa tête !

Exercice 4 : Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \lfloor x \rfloor$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \lfloor x^2 \rfloor$

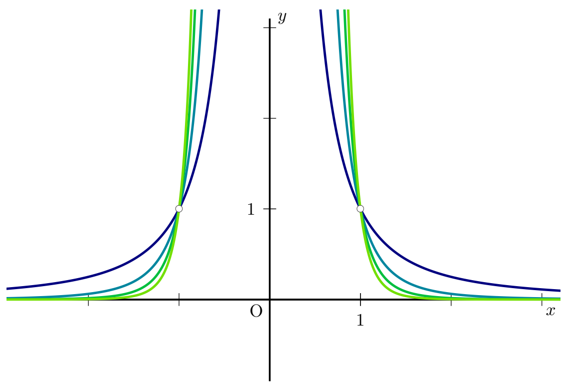
I.5 Asymptote

Le comportement à l'infini, dit *comportement asymptotique*, peut aussi aider à cerner l'allure de la courbe.

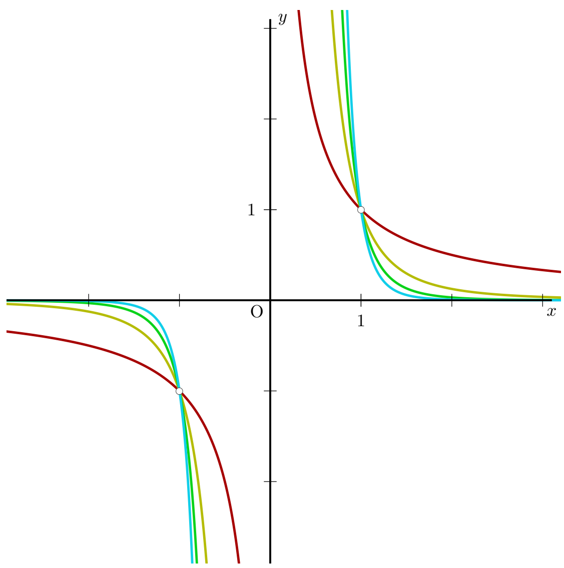
On définit pour cela la notion de droite asymptote [3] : il s'agit d'une droite qui approche d'aussi près que l'on veut une portion de la courbe lorsque l'on s'éloigne vers l'infini dans l'une des deux directions. Plus précisément :

Définition 4 (Asymptote) : On dit qu'une fonction f admet :

1. une *asymptote verticale* au voisinage de a d'équation $x = a$ lorsque $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$.
2. une *asymptote horizontale* au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = b$ lorsque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.
3. plus généralement, une droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = ax + b$, dite *asymptote oblique*, au voisinage de $\pm\infty$ lorsque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.



$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n = 2, 4, 6, 8$.



$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n = 1, 3, 5, 7$.

Figure XV.14 – Les courbes des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale et l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

[3]. De l'étymologie grecque construit à l'aide du préfixe privatif « a » et de « symptôsis » (rencontre) : la droite qui ne se rencontre pas.

Remarque : L'utilisation du terme asymptote ne se limite pas aux droites. On parlera bientôt de courbes asymptotes.

On remarquera que l'existence de la limite n'est pas nécessaire pour que la courbe admette une asymptote verticale comme c'est le cas pour $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ pour n impair.

Méthode 1 (Déterminer une droite asymptote (non verticale)) :
Tant qu'on ne dispose pas de méthode plus sophistiquée, le principe est le suivant (pour une asymptote en $+\infty$) :

1. Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$:
   — Si cette limite n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.

     Dans le cas infini, on dit alors que la courbe admet une *branche parabolique* de direction $(\mathrm{O}y)$.
   — Si cette limite est finie, de valeur a, on dit que la droite $y = ax$ est direction asymptotique de la courbe en $+\infty$.
2. On étudie la limite de $f(x) - ax$:
   — Si elle n'existe pas, ou si elle est infinie, la courbe de f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.

     Dans le cas infini, on dit alors que la courbe admet une *branche parabolique* de direction $(\mathrm{O}x)$.
   — Si cette limite est finie, de valeur b, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

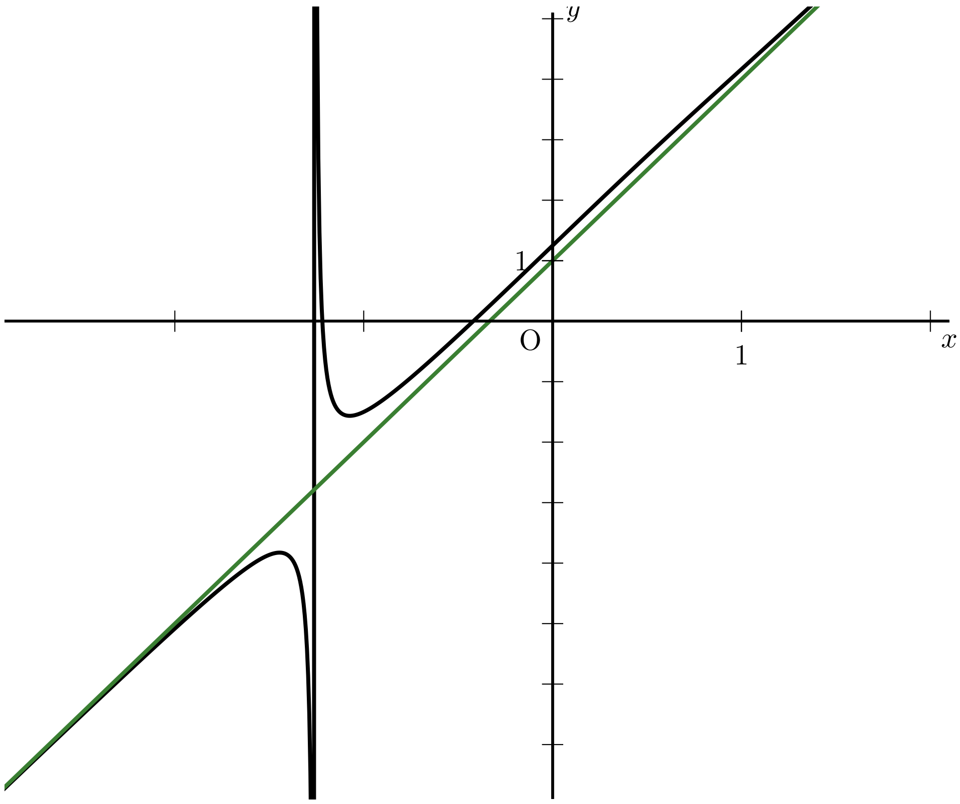


Figure XV.15 – La droite d'équation $y = 3x + 1$ est asymptote à la courbe de $f : x \longmapsto 3x + 1 + \dfrac{1}{2(x^3+2)}$.

Nous verrons plus tard comment on peut obtenir a sans former le quotient, à l'aide d'équivalents, ou même comment obtenir simultanément a et b à l'aide d'un « développement limité ».

Exercice 5 : Étudier les asymptotes éventuelles des courbes de :

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{4x^2-2}{2x+1}$ $\qquad f_2 : x \longmapsto \sqrt{x^2+3x+1}$

Exercice 6 : Montrer que la courbe de $x \mapsto \cos(x) - x$ n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Remarque : Dire que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ est équivalent de dire que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - b = 0$. Cette dernière expression représente, au signe près, la distance entre la courbe et son asymptote : à l'infini, la courbe représentative se rapproche infiniment de son asymptote.

Méthode 2 (Position relative d'une courbe et de son asymptote) :
Soit f une fonction et $y = ax + b$ l'équation de son asymptote horizontale ou oblique $(\mathscr{D})$.

Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $(\mathscr{D})$ en $+\infty$, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ sur un voisinage $]\alpha\,;+\infty[$ de celui-ci.

x	α		δ		$+\infty$
Signe de $f(x) - (ax+b)$		$+$	0	$-$	
Position de $\mathscr{C}_f$ et $(\mathscr{D})$		$\mathscr{C}_f$ au dessus de $(\mathscr{D})$		$\mathscr{C}_f$ au dessous de $(\mathscr{D})$	

II/ Stabilité algébrique

ATTENTION Dans les paragraphes qui suivent, on considèrera un réel $a \in \overline{\mathbb{R}}$, deux fonctions f et g à valeurs réelles définies dans un voisinage de a et on considèrera les limites en ce point.

II.1 Limite d'une somme

Proposition 10 (Somme) :
Soient ℓ, $\ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme Indéter.

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\ell) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} ((x+\ell) - x) = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} = -\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \cos(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x = +\infty$, mais $(x + \cos(x) - x) = \cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exemple 5 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2 + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ a pour limite 2 en $+\infty$.

En effet $\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x}} & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2 & = & 2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les sommes de limites}]{\text{D'après les théorèmes sur}} \lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 2.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 + 0 = 2$ d'après les théorèmes sur les limites de sommes.

II.2 Limite d'un produit

Proposition 11 (Produit) :
Soient ℓ, $\ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞ [4]	Forme Indéter.	∞ [4]

ATTENTION

Cas de la forme indéterminée $0 \times (\infty)$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ : $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\pi}{x-2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} x - 2 = 0$, mais $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\pi}{x-2} \times (x-2) = \pi$.
- On peut obtenir $\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} \times x^2 = -\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} \times x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

[4]. Appliquer la règle des signes d'un produit.

II.3 Limite d'un quotient

Proposition 12 (Inverse) :
Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	$\ell \neq 0$	0	∞
alors $\dfrac{1}{f}$ a pour limite	$\dfrac{1}{\ell}$	∞[5]	0

Proposition 13 (Quotient) :
Soient ℓ, $\ell' \in \mathbb{R}$.

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ'[6]
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞[7]	Forme Indéter.	0	∞[7]

Exercice 7 : Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{1-x^4}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2-\sqrt{4-\frac{1}{x}}}$.

II.4 Limite d'une composée

Proposition 14 (Limite d'une fonction Composée) :
Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathrm{E}$ et $g : \mathrm{E} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à E et $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x\to b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = c.$$

Cette dernière propriété nous permet alors de justifier la recherche d'une limite par changement de variable *i.e.* on ne s'intéresse plus à la limite de $(gof)(x)$ quand $x \to a$, mais de $g(\mathrm{X})$ quand $\mathrm{X} \to b$.

[5]. Appliquer la règle des signes d'un quotient.
[6]. y compris $\ell' = 0$.
[7]. Appliquer la règle des signes d'un quotient.

Exemple 6 : On cherche la limite de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x)+1}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x)+1} \underset{\boxed{\substack{\mathrm{X}=\ln(x) \\ \lim_{x\to 0} \mathrm{X} = -\infty}}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{\mathrm{X} \to -\infty} \frac{\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X}}{\mathrm{X}^2+1} = 1.$$

Exercice 8 : Déterminer les limites suivantes si elles existent. Dans le cas contraire, on déterminera les limites par valeurs supérieures et inférieures.

Dans tous les cas, préciser l'équation d'une éventuelle asymptote à la courbe représentative de f.

1. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+6x-7}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1+x}{1-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{2-x}{x}}$

En posant $g \equiv |...|$ dans la proposition (14) , on retrouve le corollaire (4.1) :

Corollaire 14.1 (Limite et valeur absolue) :
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{K}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \implies \lim_{x \to a} |f(x)| = |\ell|\,.$$

Corollaire 14.2 (Limite d'une suite explicite) :
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[\mathrm{A}\,;+\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = f(n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{A}$.

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\text{Si } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell.$$

Exemple 7 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{\dfrac{3n+2}{n+1}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$ et $\displaystyle\lim_{x \to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$, on a aisément $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Corollaire 14.3 (Limite d'une suite quelconque) :
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes appartiennent à I.

Pour réels a et b de $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b.$$

Cet énoncé est la base d'un théorème fort des suites récurrentes définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. En effet, si $u_n \longrightarrow \ell$, alors $u_{n+1} \longrightarrow \ell$.

Le corollaire précédent permet donc d'écrire :

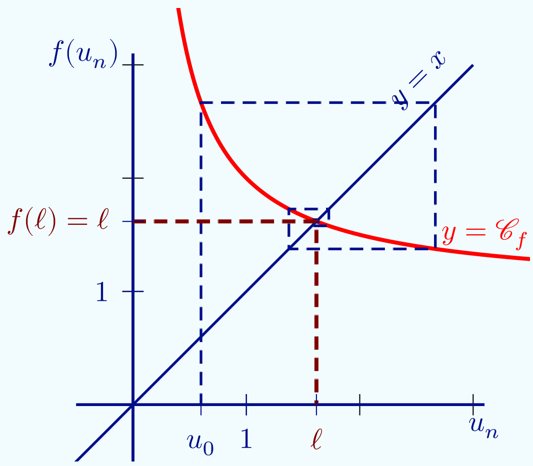
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n).$$

Exemple 8 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite définie par récurrence par une fonction dont est tracée la courbe représentative ci-contre.

Les termes de la suite semblent converger vers le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$, un « point fixe » de f.

On verra dans quel contexte ceci est vrai.



En pratique, le corollaire (14.3) permet souvent de démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point a :

Méthode 3 (Montrer qu'une fonction n'a pas de limite) :
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pour montrer que f n'a pas de limite en a, il suffit de trouver 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

Exemple 9 (cos n'a pas de limite en $\pm\infty$) : Considérons les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = 2\pi n$ et $v_n = \dfrac{\pi}{2} + u_n$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(u_n) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(v_n)$.

La fonction cos ne peut donc avoir de limites en $+\infty$.

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ périodique et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

Montrer que f est constante.

III/ Propriétés de la limite

III.1 Limite et relation d'ordre

Proposition 15 (Limite et ordre) :
Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g définies sur tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a.

$$\text{Si, } \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a,\ g(x) \leqslant f(x), \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell' \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \ell' \leqslant \ell.$$

On parle souvent de conservation des inégalités **larges** par passage à la limite.

Remarques : La proposition (15) n'est pas vraie avec des inégalités strictes : Si $g(x) < f(x)$ alors on ne peut pas en déduire $\ell < \ell'$ mais seulement $\ell \leqslant \ell'$:

Prenez, par exemple $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ qui tendent toutes deux vers 0 alors qu'il est clair que $-\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

Théorème 16 :
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, trois fonctions f, g et h définies sur un voisinage ouvert $\mathcal{V}_a$ de a et ℓ un réel.

Théorème d'encadrement :

$$\text{Si } \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Théorème de majoration :

$$\text{Si } \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad g(x) \leqslant f(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

Théorème de minoration :

$$\text{Si } \begin{cases} \forall\, x \in \mathcal{V}_a, \quad f(x) \leqslant g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Ce théorème est également vrai pour des limites à gauche ou à droite.

Exercice 10 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \cos(x)$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.
4. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

III.2 La monotonie contrôle la limite

Théorème 17 (Théorème de la limite monotone) :
Soient $a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et $f :]a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante.

— Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b, et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup\limits_{]a;b[}(f) < +\infty$.

— Si f n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

Remarque : Lorsque f est décroissante, on a les résultats correspondants :
— Si f est décroissante et minorée, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \inf\limits_{]a;b[}(f) > -\infty$.
— Si f est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$.

III.3 Limites à gauche et à droite

Proposition 18 :
Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et $f :]a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ une fonction croissante et $x_0 \in]a\,;b[$.

Alors, f admet une limite à gauche et une limite à droite finies en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

On retiendra le théorème et la proposition précédents sous la forme ci-dessous :

Corollaire 18.1 :
Toute fonction monotone possède une limite à gauche et une limite à droite en tout point en lequel cela a un sens.

Afin de bien le comprendre, précisons ces énoncés :

À retenir 1 :
Le théorème de la limite monotone affirme que dans le cas particulier d'une fonction $f : [a\,;b[\longmapsto \mathbb{R}$ croissante avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a\,;+\infty]$:

1. la limite $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ EXISTE et elle est forcément FINIE car $f(a) \leqslant \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ par passage à la limite,
2. pour tout $c \in]a\,;b[$, les limites $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ EXISTENT et elles sont forcément FINIES car $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$,
3. la limite $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ EXISTE et elle est soit finie, soit égale à $+\infty$.

IV/ Extension aux fonctions complexes

Définition/Théorème 5 (Limite d'une fonction complexe en un point) : Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall\, \mathrm{V}_\ell \in \mathscr{V}_{\mathbb{C}}(\ell), \quad \exists\, \mathrm{V}_a \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(a), \quad \forall\, x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{V}_a, \quad f(x) \in \mathrm{V}_\ell,$$

i.e.

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0, \quad \forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |x-a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

ou encore

$$\lim_{x\to a} |f(x) - \ell| = 0.$$

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable, ce qui autorise la notation $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

On définit de la même manière que précédemment les limites à gauche et à droite (en a).

Théorème 19 (Parties réelle et imaginaire) :
Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a} \mathrm{Re}\,(f)(x) = \mathrm{Re}\,(\ell) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \mathrm{Im}\,(f)(x) = \mathrm{Im}\,(\ell).$$

Définition 6 (Fonction bornée) : Soit $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que f est bornée s'il existe un réel $\mathrm{K} \geqslant 0$ tel que $\forall\, x \in \mathrm{D}, \quad |f(x)| \leqslant \mathrm{K}$.

Globalement, on dit que f est bornée sur D si, et seulement si $|f|$ l'est.

En particulier,

Corollaire 19.1 :
Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Si $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ admet une limite finie en $a \in \overline{\mathrm{D}}$ alors f est bornée sur un voisinage de a.

ATTENTION

Pas de $\pm\infty$ dans $\mathbb{C}$ ni de théorèmes basés sur la relation d'ordre.

Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions complexes, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.

Les grands théorèmes d'existence de limite - théorèmes d'encadrement/minoration/-majoration et théorème de la limite monotone - n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.